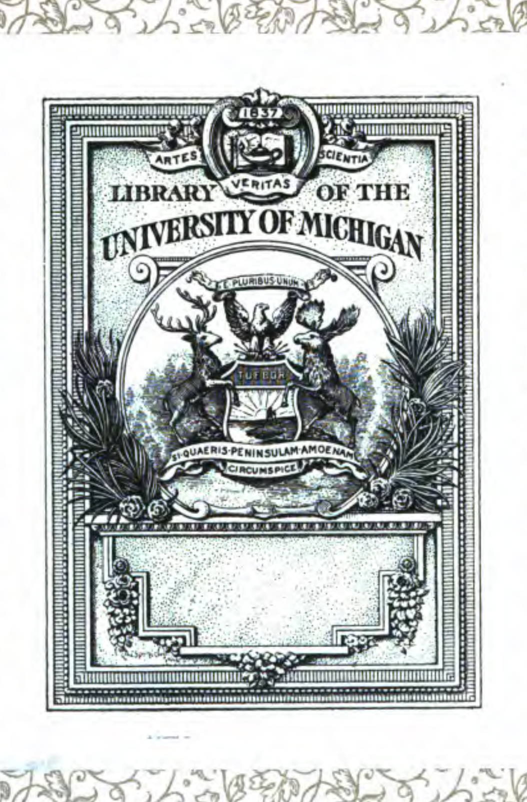
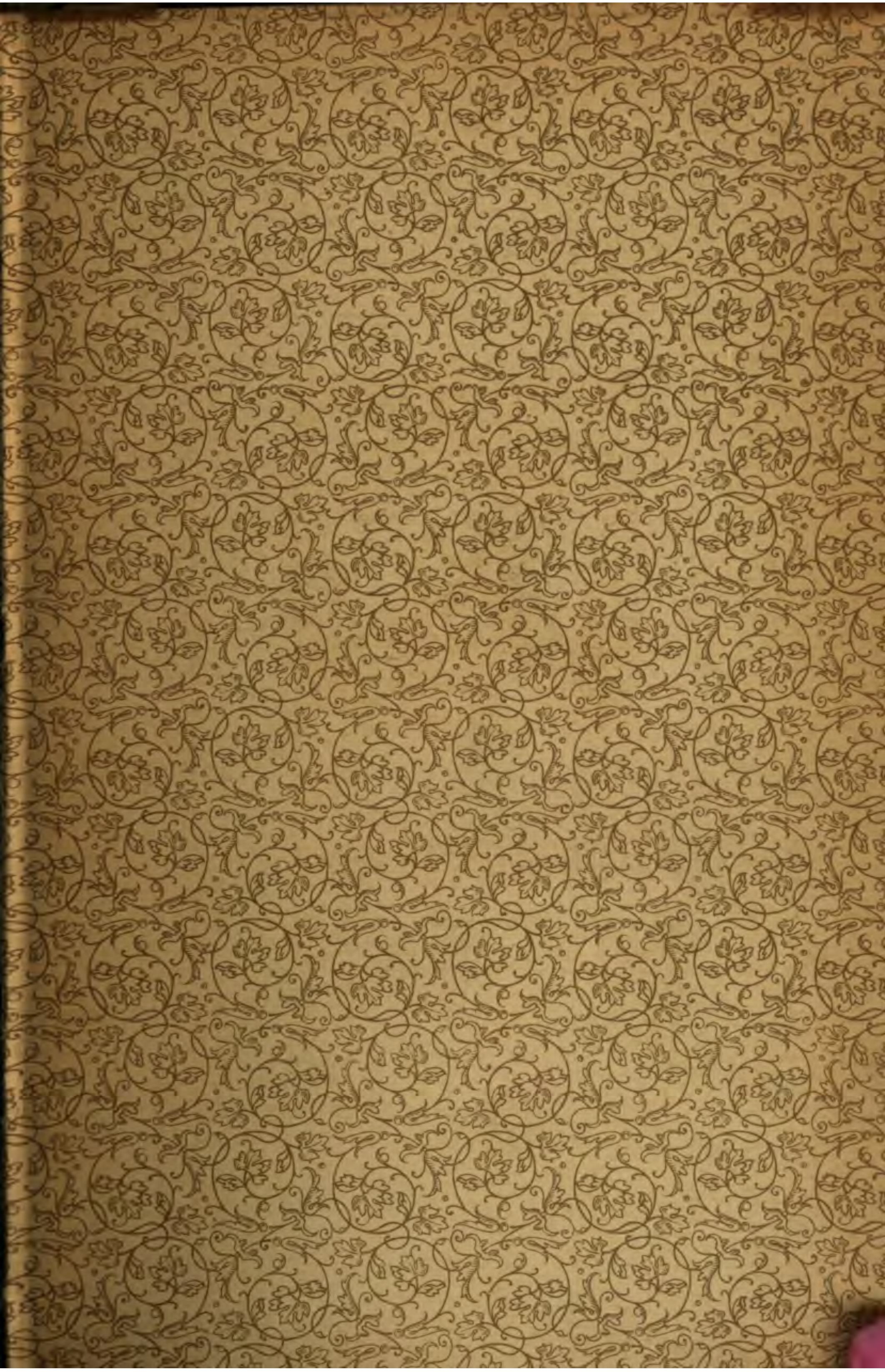



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





J. A. SERRET.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS DEUTSCH BEARBEITET

VON

AXEL HARNACK.

ZWEITE, DURCHGESEHENE AUFLAGE

MIT UNTERSTÜTZUNG DER HERREN H. LIEBMANN UND E. ZERMELO

HERAUSGEGEBEN VON

GEORG BOHLMANN.

ZWEITER BAND.

INTEGRALRECHNUNG.

MIT 55 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Vorwort.

Die Grundsätze, welche mich bei der Neu-Herausgabe des Serret-Harnack I leiteten, haben im Allgemeinen Billigung und daher auch bei Band II Anwendung gefunden. Ich kann also wegen der allgemeinen Gesichtspunkte und der äufseren Anordnung auf meine Vorrede zu Band I verweisen.

Was die Änderungen im Einzelnen angeht, so handelt es sich bei ihnen, so weitgehend sie zum Teil auch aussehen mögen, im Grunde nur um eine übersichtlichere Gruppierung des alten Stoffes. Zunächst galt es die Definition des Integrales als Grenzwert einer Summe nachzuholen. Dies geschieht in dem ersten Kapitel, in welches gleichzeitig die elementaren Sätze über das Rechnen mit Integralen aufgenommen sind. Die Entwickelungen sind an die geometrische Anschauung angelehnt und geben daher gleichzeitig die Definition des in Nr. 192 des ersten Bandes als evident angenommenen Begriffes des Flächeninhalts.

Die folgenden Kapitel II—VI entsprechen den früheren Kapiteln I—V, Kapitel VII und VIII sind in dieser Zusammenstellung neu. Vor Allem war ich bemüht durch zweckmäfsige Anordnung und Einschaltung orientierender Nummern (wie 429, 464—467) die Übersicht zu erhöhen. In Nr. 533 wurde eine graphische und numerische Darstellung der Γfunktion hinzugefügt, in Nr. 547 und 549 die Definition der Bogenlänge nachgeholt und im sechsten Kapitel die mehrfachen Integrale und die Volumina definiert.

Das siebente Kapitel ist durch Zusammenstellung und Ergänzung derjenigen Artikel des alten Serret entstanden, die sich auf mehrgliedrige Differentiale beziehen. Es soll hauptsächlich zur Vorbereitung auf das achte Kapitel dienen und giebt zum

Schlufs als Anwendung die Theorie des Amslerschen Polarplanimeters.

Das achte Kapitel ist ein Gegenstück zum elften Kapitel des ersten Bandes. Behandelte dieses die Theorie der komplexen Funktionen auf Grund der Potenzreihen, so trägt jenes diejenigen Sätze der Cauchyschen Funktionentheorie im Zusammenhange vor, welche bisher in dem Serretschen Werke als gelegentliche Einschaltungen zerstreut gewesen waren. Manche Zusätze ergaben sich dabei von selbst. Es holt nach die Lagrangesche Reihe, die Definition des arcsin z und arctg z, so wie die Ableitung der Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrales erster Gattung und bereitet die Existenzbeweise der Integrale von Differentialgleichungen im dritten Bande vor.

Während sonst ein zu weites Eingehen in arithmetische Einzelheiten vermieden wurde, ist Harnacks Anhang über Fouriersche Reihen im Wesentlichen unverändert abgedruckt, nur wurden noch die von Harnack im Kapitel über die bestimmten Integrale bewiesenen aber jetzt an dieser Stelle ausgelassenen Sätze über integrierbare Funktionen vorausgeschickt. In der That bildet der Harnacksche Anhang eine Spezialität in der deutschen Litteratur, für welche ein Verweis auf andere deutsche Lehrbücher nicht möglich gewesen wäre.

Für Berichtigungen und Verbesserungsvorschläge werde ich auch bei diesem Bande sehr dankbar sein. Die Bemerkungen, die mir zum ersten Bande zugegangen sind, waren mir zum Teil von grofsem Nutzen, besonders Herr Hočevar hat sich um das Werk durch Einsendung eines ausführlichen Verzeichnisses verdient gemacht, welches den „Berichtigungen zu Band I“ am Schlusse dieses Bandes zu Grunde gelegt ist. Auch den Herren Gutzmer und Pringsheim verdanke ich wichtige Verbesserungsvorschläge.

Zum Teil hat man sich damit nicht einverstanden erklärt, dafs der Zahlbegriff nicht selbständig entwickelt, sondern der Leser deswegen auf andere Werke verwiesen wird. Um auch diesen Wünschen entgegenzukommen, sollen am Schlusse des dritten Bandes die wichtigsten Sätze über die Zahl abgeleitet und diejenigen Stellen noch einmal aufgeführt werden, an welchen von ihnen Gebrauch gemacht wurde.

Das Erscheinen dieses Bandes ist dadurch sehr verzögert worden, dafs ich durch anderweitige dringende Arbeiten schon seit geraumer Zeit fast ganz in Anspruch genommen bin, und es wäre mir überhaupt nicht möglich gewesen den Band in absehbarer Zeit fertig zu stellen, hätten mich nicht die Herren H. Liebmann und E. Zermelo bei der Durcharbeitung des Manuskriptes aufs Beste unterstützt und das Lesen der Korrekturen von Bogen 11 an ganz auf sich genommen. Besonders aber wurde bei dieser Lage der Dinge die Geduld der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Anspruch genommen, der ich für ihr grofses Entgegenkommen herzlichst zu danken gerade dieses Mal besondere Veranlassung habe.

Göttingen, den 12. Juli 1899.

G. Bohlmann.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Begriff des Integrales.

Zweites Kapitel.

Die Integration bekannter Funktionen.

Drittes Kapitel.

Theorie der bestimmten Integrale.

Viertes Kapitel.

Theorie der Eulerschen Integrale.

Fünftes Kapitel.

Die Quadratur und Rektifikation von Kurven.

Sechstes Kapitel.

Die Kubatur der Körper und die Quadratur krummer Flächen. Mehrfache Integrale.

Siebentes Kapitel.

Funktionen von mehreren reellen Variabelen und mehrgliedrige Differentiale nebst ihren Integralen.

Achtes Kapitel.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Erstes Kapitel.

Begriff des Integrales.

§ 1. Das Integral als ursprüngliche Funktion.

399. Gegenstand der Integralrechnung. Die im ersten Bande dieses Werkes vorgetragene Differentialrechnung lehrte uns zu einer gegebenen Funktion der Veränderlichen x:

$$y = F(x)$$

den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

zu berechnen. Die Integralrechnung stellt sich umgekehrt die Aufgabe, wenn die Funktion $f(x)$ gegeben ist, eine Funktion $y = F(x)$ zu finden, deren Ableitung gerade die gegebene Funktion $f(x)$ ist. Eine solche Funktion $F(x)$ heifst ein *Integral* oder auch eine *ursprüngliche Funktion* von $f(x)$ und wird durch

$$y = \int f(x)\, dx$$

bezeichnet. Der Sinn dieser von Leibnitz herrührenden Schreibweise wird später deutlich werden. Die Operation, vermöge deren man aus $f(x)$, $F(x)$ findet heifst die *Integration* von $f(x)$ und man sagt, man stellt sich die Aufgabe $f(x)$ zu *integrieren*. Die Funktion $f(x)$ oder auch das Differential $f(x)\,dx$ heifst der *Integrand* von $\int f(x)\, dx$.

400. Exkurs über inverse Operationen.

Differentiieren und integrieren stehen demnach in einer ähnlichen Beziehung zu einander wie Subtrahieren und Addieren, sie sind zu einander *inverse* Operationen. Der Übergang von

einer Operation zu ihrer inversen ist dem Leser bereits öfter begegnet und es verlohnt der Mühe einen Augenblick bei den Eigentümlichkeiten stehen zu bleiben, die ein derartiger Process aufweisen kann.

Mag man von der Addition zur Subtraktion, von der Multiplikation zur Division, von der Potenzierung zum Wurzelausziehen oder zum Logarithmieren übergehen, immer ist man dem Umstand begegnet, daſs der bisherige Zahlbereich nicht ausreichte, wollte man anders die fraglichen Operationen möglichst ausnahmslos gelten lassen. Etwas Ähnliches werden wir auch hier im Bereiche der Funktionen zu konstatieren haben. Während wir nämlich im ersten Bande gefunden haben, daſs der Differentialquotient einer rationalen Funktion immer wieder eine rationale Funktion ist, werden wir sehr bald sehen, daſs ein Integral einer rationalen Funktion unter Umständen eine transcendente Funktion sein kann. Beim Übergang vom Potenzieren zum Radizieren hat ferner der Leser erfahren, daſs es zu einer gegebenen Zahl mehrere Wurzeln von einem bestimmten Exponenten giebt und ebenso wird er bald lernen, daſs auch das Integrieren eine vieldeutige Operation ist, insofern es zu einem gegebenen Integranden unendlich viele Integrale giebt.

Zwei Unterschiede wollen wir jedoch hervorheben, die hier trotz aller Analogien bestehen. Einmal ist die Operation, welche man als Analogon des Differentiierens aufzufassen hat die Subtraktion; denn jenes beruht auf der Bildung von Differenzenquotienten und es tritt dazu nur noch ein Grenzprocess. Hiernach wird man die Integration als ein Analogon der Addition aufzufassen haben. In der That werden wir bald erkennen, daſs das Integral sich auch als Grenzwert einer Summe auffassen läſst und wir werden uns dadurch auch die Bezeichnungsweise $\int f(x)\,dx$ erklären können, in der das Zeichen $\int$ aus dem Buchstaben S entstanden ist und eine Art von Summation andeuten soll. Während man also in der Elementarmathematik die Addition als das Primäre, die Subtraktion als das Sekundäre anzusehen hat, so befolgen wir hier den umgekehrten Weg von der Differentiation zur Integration.

Der andere Unterschied besteht in Folgendem. Während die Elementarmathematik sich den Zahlbegriff erst stufenweise bis zur erforderlichen Allgemeinheit ausbildet, haben wir an die Spitze der Infinitesimalrechnung den Funktionsbegriff bereits in mehr als ausreichender Allgemeinheit hingestellt und das Integral einer Funktion wird — wenn es überhaupt existiert — wieder eine Funktion sein, nach unserer ursprünglich aufgestellten Definition.

401. Beispiele von Integralen. Wir haben bereits im ersten Bande in speciellen Fällen oft zu einer gegebenen Funktion ein Integral gefunden, namentlich geschah dies im 8ten Kapitel bei der Quadratur und Rektifikation von Kurven. Überhaupt können wir ja jede in Band I ausgeführte Differentiationsformel in eine Integralformel umschreiben. Wir erwähnen z. B. die Formeln

$$\frac{dx^m}{dx} = m x^{m-1}$$

und

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$$

und schliefsen aus ihnen, dafs x^m ein Integral von mx^{m-1} und lx ein solches von $\frac{1}{x}$ ist. Wir schreiben dies:

$$x^m = \int m x^{m-1}\, dx, \quad lx = \int \frac{dx}{x}$$

und heben die zweite Formel als Beleg für unsere in der vorigen Nummer ausgesprochene Behauptung hervor, dafs das Integral von einem rationalen Integranden nicht wieder rational zu sein braucht. In der That ist $\frac{1}{x}$ eine rationale, aber lx eine transcendente Funktion von x.

402. Die Vieldeutigkeit des Integrales. Wir haben bereits oben vorbereitend erwähnt, dafs zu einer gegebenen Funktion im Allgemeinen unendlich viele Integrale gehören. Die so entstehende unendliche Vieldeutigkeit wird durch den folgenden Satz übersehbar:

Satz. Ist $F_0(x)$ ein Integral von $f(x)$, so ist jedes andere $F(x)$ gegeben durch die Gleichung:

$$F(x) = F_0(x) + C,$$

in der C eine willkürliche Konstante bedeutet.

In der That, wir haben in Artikel 29 erkannt, dafs die Ableitungen zweier Funktionen $F_0(x)$ und $F(x)$ dann und nur dann einander gleich sind, wenn ihre Differenz eine Konstante ist. Da aber sowohl

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{als auch} \quad \frac{dF_0(x)}{dx} = f(x)$$

sein soll, so folgt

$$F(x) = F_0(x) + C,$$

wie behauptet. Fügen wir diese additive Konstante auch in den Beispielen der vorigen Nummer hinzu, so folgt:

$$\int m x^{m-1}\, dx = x^m + C, \quad \int \frac{dx}{x} = lx + C$$

und diese Gleichungen sind jetzt so zu lesen, dafs jedes Integral von mx^{m-1} von der Form $x^m + C$ und jedes Integral von $\frac{1}{x}$ von der Form $lx + C$ ist. Man kann die Konstante dadurch bestimmen, dafs man angiebt, welchen Wert — den sogenannten Anfangswert — das Integral für einen bestimmten Wert $x = x_0$ des Argumentes annehmen soll. Hat man z. B. verlangt, dafs das Integral für $x = x_0$ verschwindet, so bestimmt sich C aus

$$0 = F_0(x_0) + C$$

zu

$$C = -F_0(x_0)$$

und dann wird

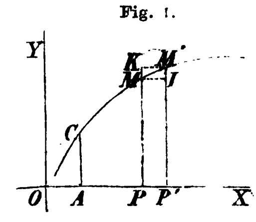
$$F(x) = F_0(x) - F_0(x_0)$$

das fragliche Integral.

§ 2. Das Integral als Grenzwert einer Summe.

403. Geometrische Veranschaulichung des Integrales.

Fig. 1.



Eine geometrische Veranschaulichung des Integrales gewinnen wir durch die Betrachtungen der Nr. 192. Zeichnen wir die Kurve $y = f(x)$, indem wir sie auf rechtwinklige Koordinaten beziehen, und betrachten das Flächenstück, $APM\widehat{C}A$, das von den Ordinaten $AC = f(x_0)$ und $PM = f(x)$ begrenzt wird, die den Abscissen $OA = x_0$ und $OP = x$ entsprechen. Sein Flächeninhalt u wird dann eine Funktion von x:

$$u = F(x),$$

von der wir in Nr. 192 erkannten, daſs ihre Ableitung gleich $f(x)$ ist. Wir haben also:

$$u = \int y\,dx$$

und erkennen:

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten, die die Voraussetzungen der Nr. 192 erfüllt, so ist der Flächeninhalt des Stückes $APM\widehat{C}A$, welches zwischen einer beliebigen Anfangsordinate AC und der dem Werte $OP = x$ entsprechenden Endordinate PM liegt, ein Integral von $f(x)$.

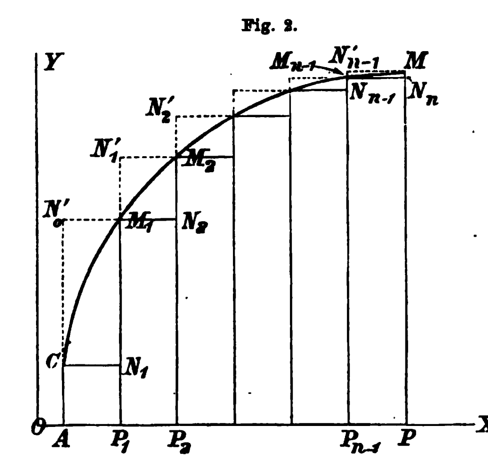
404. Notwendigkeit eines Existenzbeweises. Die bisherigen Betrachtungen schweben noch insofern in der Luft, als wir immer stillschweigend als selbstverständlich vorausgesetzt haben, daſs man zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Funktion $F(x)$ finden kann, so daſs $F'(x) = f(x)$ ist. Es fragt sich mit anderen Worten, ob und unter welchen Bedingungen ein Integral von $f(x)$ existiert. Daſs es Fälle giebt, in denen dies so ist, lehren die Beispiele der Nr. 401. Es ist aber eine allgemeine Beantwortung der Frage erforderlich. Diese wird zugleich die in Nr. 192 noch in Aussicht gestellte Ergänzung bringen und zeigen, daſs unter den dort gemachten Voraussetzungen man thatsächlich von einem Flächeninhalte reden kann.

Die Frage nach der Existenz einer Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, wird sich nur dadurch entscheiden lassen, daſs man eine allgemeine Methode angiebt, um aus einer vorgelegten Funktion $f(x)$ ein Integral $F(x)$ zu berechnen. Nach welchen Gesichtspunkten man hierbei zu verfahren hat, dafür giebt uns die geometrische Anschauung einen Anhalt.

Geometrisch gesprochen handelt es sich nur darum zu entscheiden, wie man bei einer gegebenen Kurve den Flächeninhalt $APM\widehat{C}A$ definieren soll. Man wird da genau so verfahren, wie man es in der Elementarmathematik bei der Quadratur des Kreises gethan hat. Man wird die Kurve durch ein Polygon ersetzen, indem man auf der Strecke AP eine Reihe

von intermediären Teilpunkten $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$ einführt (Fig. 2), die den Abscissen $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ entsprechen und in ihnen die Ordinaten $f(x_1) = P_1 M_1$, $f(x_2) = P_2 M_2, \ldots f(x_{n-1}) = P_{n-1} M_{n-1}$ konstruiert. Ziehen wir noch die Parallelen CN_1, $M_1 N_2, \ldots M_{n-1} N_n$ zur x-Achse, welche die Ordinaten $P_1 M_1$, $P_2 M_2, \ldots PM$ bezw. in $N_1, N_2, \ldots N_n$ schneiden, so wird der Flächeninhalt des Polygons $ACN_1 M_1 N_2 \ldots N_n PA$ den gesuchten Wert mit um so gröſserer Annäherung darstellen, je gröſser der Wert von n ist.

Fig. 2.



Der Flächeninhalt des Polygones ist aber die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke:

$$ACN_1 P_1 = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0),$$
$$P_1 M_1 N_2 P_2 = f(x_1) \cdot (x_2 - x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n-1} M_{n-1} N_n P = f(x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}).$$

Bezeichnet man typisch die Abscisse OP_{k-1} eines solchen Teilpunktes mit x statt x_{k-1} und die Breite $P_{k-1} P_k = x_k - x_{k-1}$ des zugehörigen Rechtecks mit Δx, so werden wir durch die Anschauung dazu geführt, das fragliche Integral als den Grenzwert einer Summe:

$$Sf(x) \Delta x$$

aufzufassen, in der x der Reihe nach die Werte $x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$, und Δx die Werte $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots x - x_{n-1}$ erhält und in der, bei festgehaltenen Endwerten $OA = x_0$ und $OP = x$, n über alle Grenzen wächst. Ausführlich schreibt sich unsere Summe so:

$$Sf(x) \Delta x = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \cdots$$
$$+ f(x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}).$$

Hierdurch wird zunächst der Sinn der Leibnitzschen Schreibweise $\int f(x)\,dx$ erklärt, in der $\int$ den Anfangsbuchstaben von Summe bedeutet. Wir können aber aus dieser anschaulichen Betrachtungsweise — indem wir genau wie bei der Kreismessung uns der elementaren Methode der ein- und umgeschriebenen Polygone bedienen — auch einen strengen Existenzbeweis gewinnen.

405. Einengung der Summe in zwei Grenzen. Umgeschriebenes und eingeschriebenes Polygon. Wir gehen aus von der Summe der vorigen Nummer:

$$F_n(x, x_0) = f(x_0)\cdot(x_1 - x_0) + f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\cdot(x - x_{n-1})$$

und suchen diese in zwei Grenzen einzuschliefsen. Wir nehmen zu dem Zwecke wie in Nr. 192 an, dafs in dem Intervalle (x_0, x), $f(x)$ stetig und positiv und dafs $x > x_0$ ist. Wir markieren uns nun die gröfsten und kleinsten Werte, die $f(x)$ in jedem der Teilintervalle annimmt. Wir nennen in dem Intervalle

$$\left.\begin{array}{llllll} (x_0, x_1) & g_0 & \text{das Min.,} & G_0 & \text{das Max.} \\ (x_1, x_2) & g_1 & \text{„} \quad \text{„} & G_1 & \text{„} \quad \text{„} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x, x_{n-1}) & g_{n-1} & \text{„} \quad \text{„} & G_{n-1} & \text{„} \quad \text{„} \end{array}\right\} \text{von } f(x)$$

und setzen:

$$(1)\quad\begin{cases} \Phi_n(x_0, x) = g_0(x_1 - x_0) + g_1(x_2 - x_1) + \cdots + g_{n-1}(x - x_{n-1}) \\ \Psi_n(x_0, x) = G_0(x_1 - x_0) + G_1(x_2 - x_1) + \cdots + G_{n-1}(x - x_{n-1}). \end{cases}$$

Alsdann wird:

$$(2)\qquad \Phi_n(x_0, x) \leqq F_n(x, x_0) \leqq \Psi_n(x_0, x).$$

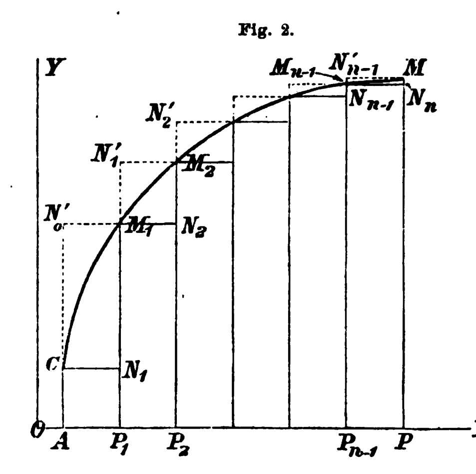
In unserer Figur ist der Specialfall betrachtet, dafs $f(x)$ immer wächst und daher $g_0 = f(x_0)$, $g_1 = f(x_1)$, ... $g_{n-1} = f(x_{n-1})$ ist, während $G_0 = f(x_1)$, $G_1 = f(x_2)$, ... $G_{n-1} = f(x)$ wird. Es ist daher $\Phi_n(x_0, x)$ der Flächeninhalt des Polygons $ACN_1M_1N_2 \ldots N_nPA$ und $\Psi_n(x_0, x)$ der des Polygons $AN_0'M_1N_1' \ldots N_{n-1}'MPA$, wo N_0', N_1' ... N_{n-1}' die Schnittpunkte der durch M_1, M_2, ... M zur x-Achse gezogenen

Parallelen bezw. mit den Ordinaten AC, $P_1M_1, \ldots P_{n-1}M_{n-1}$ bedeuten. Daher wird hier:

$$\Phi_n(x_0, x) \leqq F_n(x, x_0) \leqq \Psi_n(x_0, x).$$

In jedem Falle bedeutet $\Phi_n(x_0, x)$ den Flächeninhalt eines aus lauter Rechtecken zusammengesetzten Polygons, von dem kein Punkt außerhalb der Kurve $y = f(x)$ liegt und $\Psi_n(x_0, x)$ den Flächeninhalt eines analogen Polygons, von dem kein Punkt innerhalb von $APM\widehat{C}A$ liegt. In etwas ungenauer Ausdrucksweise können wir von den beiden Polygonen das erstere das eingeschriebene, das letztere das umgeschriebene Polygon nennen und unsere Ungleichheit so interpretieren, daß der Flächeninhalt des Stückes $AP\widehat{MC}A$ zwischen dem eines ein- und dem eines umgeschriebenen Polygons enthalten ist.

Fig. 2.



Bilden wir nun die Differenz

$$\Psi_n(x_0, x) - \Phi_n(x_0, x) = (G_0 - g_0)(x_1 - x_0) + (G_1 - g_1)(x_2 - x_1) + \cdots + (G_{n-1} - g_{n-1})(x - x_{n-1}),$$

welche den Unterschied der Flächeninhalte von um- und eingeschriebenem Polygon mißt. Die Differenzen:

$$G_0 - g_0, \quad G_1 - g_1, \quad \ldots \quad G_{n-1} - g_{n-1}$$

nennen wir die *Schwankung* der Funktion $f(x)$ in den Intervallen:

$$(x_0, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad \ldots \quad (x, x_{n-1}).$$

Diese lassen sich bei hinreichender Verkleinerung der Intervalle unter jede vorgeschriebene positive Zahl σ herabdrücken. Für hinreichend großes n wird daher:

$$\Psi_n(x_0, x) - \Phi_n(x_0, x) \leqq \sigma \cdot (x_1 - x_0) + \sigma \cdot (x_2 - x_1) + \cdots + \sigma \cdot (x - x_{n-1}).$$

Es wird also

$$\Psi_n(x_0, x) - \Phi_n(x_0, x) \leqq \sigma \cdot (x - x_0)$$

mit wachsendem n unter jede noch so kleine Zahl $\sigma \cdot (x - x_0)$ herabsinken. Wir schliefsen daher, dafs für jede Art der Teilung:

$$\lim_{n=\infty} (\Psi_n(x_0, x) - \Phi_n(x_0, x)) = 0$$

wird.

406. Eigenschaften der Φ_n und Ψ_n. Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Ausdrücke Ψ_n und Φ_n sich mit der Teilung ändern. Wir schreiben deshalb ausführlicher:

$$\Phi(x_0; x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x) \text{ für } \Phi_n(x_0, x)$$

und

$$\Psi(x_0; x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x) \text{ für } \Psi_n(x_0, x).$$

Teilen wir ein Intervall (x_{k-1}, x_k) in Teilintervalle, so ist der kleinste Wert von $f(x)$ in einem dieser Teilintervalle nicht kleiner als der kleinste Wert von $f(x)$ in dem alten Intervalle (x_{k-1}, x_k). Bezeichnet daher $\Phi(x_0; x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \ldots; x)$ ein Φ, das aus dem vorigen durch beliebige weitere Teilung der Intervalle $(x_0, x_1), \ldots (x_{n-1}, x)$ entstanden ist, so wird:

$$\Phi(x_0; x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \ldots; x) \geqq \Phi(x_0; x_1 \ldots x_{n-1}; x).$$

Umgekehrt wird der entsprechende Wert von Ψ:

$$\Psi(x_0; x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \ldots; x) \leqq \Psi(x_0; x_1 \ldots x_{n-1}; x).$$

Bei einer weiteren Teilung der Intervalle nehmen also die Werte der Ψ ab, die der Φ aber zu. Dabei bleibt aber — welches auch die Teilung sein mag — jedes Ψ immer gröfser als jedes Φ; d. h. es ist:

$$\Phi(x_0; x_1 \ldots x_{n-1}; x) \leqq \Psi(x_0; x_1' \ldots x_{m-1}'; x).$$

In der That, bezeichnet man die Reihe der Werte

$$x_1 \ldots x_{n-1}; x_1' \ldots x_{m-1}'$$

ihrer Gröfse nach geordnet durch

$$x_1'' x_2'' \ldots x_p'',$$

so hat man eine Unterteilung beider Teilungen gewonnen und es wird daher:

$$\Phi(x_0; x_1 \ldots x_{n-1}; x) \leqq \Phi(x_0; x_1'' x_2'' \ldots x_p''; x)$$
$$\leqq \Psi(x_0; x_1'' x_2'' \ldots x_p''; x) \leqq \Psi(x_0; x_1' \ldots x_p'; x)$$

wie behauptet war.

Da nun bei wachsender Teilung die Ψ abnehmen und dabei immer größer als irgend ein Φ bleiben, so haben sie einen bestimmten Grenzwert, und da bei wachsender Teilung die Φ zunehmen und immer kleiner als irgend ein Ψ bleiben, so haben auch sie einen bestimmten Grenzwert und es ist daher:

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(x, x_0) = \Phi(x, x_0)$$
$$\lim_{n=\infty} \Psi_n(x, x_0) = \Psi(x, x_0).$$

Andrerseits wird nach der vorigen Nummer:

$$\lim (\Psi_n(x, x_0) - \Phi_n(x, x_0)) = 0.$$

Es wird also $\Phi(x, x_0) = \Psi(x, x_0)$. Bezeichnen wir diesen gemeinsamen Wert mit $F(x, x_0)$, so wird nach (2) auch

$$\lim_{n=\infty} F_n(x, x_0) = F(x, x_0).$$

Wir haben also den Satz gewonnen:

Satz. Es sei $f(x)$ in dem Intervalle (x_0, x) stetig und positiv. Alsdann erhält die Summe

$$F_n(x, x_0) = f(x_0)\cdot(x_1 - x_0) + f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + \cdots$$
$$+ f(x_{n-1})\cdot(x - x_{n-1}),$$

in welcher

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x$$

ist, bei festem x_0 und x und unbegrenzt wachsendem n einen von der Art der Einteilung unabhängigen Grenzwert:

$$F(x, x_0),$$

der nur von x_0 und x abhängt.

407. Additionsformel. Aus der geometrischen Anschauung erkennt man, daſs $F(x, x_0)$ den Flächeninhalt desjenigen Flächenstückes bedeutet, das von den den Abscissen $OA = x_0$ und $OP = x$ entsprechenden Ordinaten $AC = f(x_0)$ und $PM = f(x)$ begrenzt ist und das andrerseits von der Geraden AP und dem Kurvenbogen $\widehat{CM}$ eingeschlossen ist. Man wird bereits hiernach vermuten, daſs $F(x, x_0)$ ein Integral von $f(x)$ ist und zwar dasjenige, welches für $x = x_0$ verschwindet. Um dies analytisch zu erweisen, werden wir erst eine additive Eigenschaft der soeben definierten Funktion $F(x, x_0)$ erweisen. Betrachtet man nämlich in Fig. 1 die Fläche $APM\widehat{C}A$, so ist diese gleich $F(x, x_0)$:

$$F(x, x_0) = APM\widehat{C}A.$$

Fügt man zu dieser die Fläche $PP'\widehat{M'M}P$, welche durch die Abscissen $OP = x$ und $OP' = x'$ begrenzt ist, so findet man ebenso:

$$F(x', x) = PP'\widehat{M'M}P.$$

Endlich ist die den Abscissen $OA = x_0$ und $OP' = x'$ entsprechende Fläche

$$AP'\widehat{M'C}A = F(x', x_0)$$

gleich der Summe der beiden vorigen Flächen. Es wird also

$$F(x', x_0) = F(x', x) + F(x, x_0)$$

sein. Um die Richtigkeit dieser Gleichung auch analytisch darzuthun, gehen wir auf die Funktionen Φ_n und Ψ_n zurück. Unter Benutzung analoger Bezeichnungsweisen wie oben erkennen wir, dafs jedenfalls:

$$\Phi_n(x', x) = g_n(x_{n+1} - x) + g_{n+1}(x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots \\ + g_{2n-1}(x' - x_{2n-1})$$

ist, wo $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n-1}$ irgend welche der Gröfse nach geordnete Zwischenwerte zwischen x und x' und $g_n, g_{n+1}, \ldots g_{2n-1}$ die kleinsten Werte von $f(x)$ bezüglich in den Intervallen $(x, x_{n+1}), (x_{n+1}, x_{n+2}) \ldots (x_{2n-1}, x')$ bedeuten. Vorausgesetzt ist dabei, dafs $f(x)$ auch in dem Intervalle (x, x') stetig und positiv ist. Ebenso wird dann:

$$\Psi_n(x', x) = G_n(x_{n+1} - x) + G_{n+1}(x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots \\ + G_{2n-1}(x' - x_{2n-1}),$$

wo $G_n, G_{n+1}, \ldots G_{2n-1}$ die gröfsten Werte von $f(x)$ in den Intervallen $(x, x_{n+1}), (x_{n+1}, x_{n+2}) \ldots (x_{2n-1}, x')$ bedeuten. Setzt man nun wieder:

$$F_n(x', x) = f(x) \cdot (x_{n+1} - x) + f(x_{n+1})(x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots \\ + f(x_{2n-1})(x' - x_{2n-1}),$$

so wird wieder:

$$\text{(3)} \qquad \Phi_n(x', x) \leqq F_n(x', x) \leqq \Psi_n(x', x).$$

Ganz ebenso wird, wenn:

$$\Phi_{2n}(x', x_0) = g_0(x_1 - x_0) + \cdots + g_{2n-1}(x' - x_{2n-1})$$
$$\Psi_{2n}(x', x_0) = G_0(x_1 - x_0) + \cdots + G_{2n-1}(x' - x_{2n-1})$$
$$F_{2n}(x', x_0) = f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{2n-1})(x' - x_{2n-1})$$

gesetzt wird:

$$\text{(4)} \qquad \Phi_{2n}(x', x_0) \leqq F_{2n}(x', x_0) \leqq \Psi_{2n}(x', x_0).$$

Nun ist aber:

$$\Phi_{2n}(x', x_0) = \Phi_n(x, x_0) + \Phi_n(x', x)$$
$$\Psi_{2n}(x', x_0) = \Psi_n(x, x_0) + \Psi_n(x', x),$$

und daher wird:

$$\Phi_n(x, x_0) + \Phi_n(x', x) \leqq F_{2n}(x', x_0) \leqq \Psi_n(x, x_0) + \Psi_n(x', x)$$

und wir erhalten für $n = \infty$:

$$F(x, x_0) + F(x', x) \leqq F(x', x) \leqq F(x, x_0) + F(x', x),$$

d. h.:

$$F(x', x) = F(x, x_0) + F(x', x),$$

wie behauptet war.

408. $F(x, x_0)$ ist ein Integral von $f(x)$. Um nun zu erweisen, dafs $F(x, x_0)$ ein Integral von $f(x)$ ist, müssen wir darthun, dafs die Ableitung von $F(x, x_0)$ nach x gleich $f(x)$ ist. Wer sich mit einer geometrischen Begründung zufrieden giebt, kann einfach auf den Satz der Nr. 192 verweisen. Will man rein analytisch vorgehen, so ist jedenfalls:

$$\Phi_n(x, x_0) \leqq F(x, x_0) \leqq \Psi_n(x, x_0).$$

Ist nun g der kleinste, G der gröfste Wert von $f(x)$ in dem Intervalle (x_0, x), so wird auch:

$$\begin{aligned}\Phi_n(x, x_0) &= g_0(x_1 - x_0) + g_1(x_2 - x_1) + \cdots + g_{n-1}(x - x_{n-1}) \\ &\geqq g\,(x_1 - x_0) + g\,(x_2 - x_1) + \cdots + g\,(x - x_{n-1}) \\ &\geqq g\,(x - x_0),\end{aligned}$$

und analog:

$$\Psi_n(x, x_0) \leqq G\,(x - x_0),$$

also wird:

$$(1) \qquad g \cdot (x - x_0) \leqq F(x, x_0) \leqq G \cdot (x - x_0).$$

Bilden wir nun den Ausdruck:

$$\frac{F(x + h, x_0) - F(x, x_0)}{h} = \frac{F(x + h, x)}{h},$$

so folgt, wenn man in (1) x_0 durch x, x durch $x + h$ ersetzt:

$$(2) \qquad g \cdot h \leqq F(x + h, x) \leqq G \cdot h,$$

wo nun G den gröfsten, g den kleinsten Wert von $f(x)$ in dem Intervalle $(x, x + h)$ bedeutet. Mithin wird:

$$g \leqq \frac{F(x + h, x_0) - F(x, x_0)}{h} \leqq G.$$

Für $h = 0$ wird aber $G = g = f(x)$ und daher:

$$\frac{dF(x, x_0)}{dx} = f(x),$$

wie behauptet war.

Aus dieser Eigenschaft folgt ferner, da $F(x, x_0)$ nebst seiner Ableitung in dem Intervalle (x, x_0) bestimmte endliche Werte hat nach der Bemerkung in Nr. 27, dafs $F(x, x_0)$ in dem Intervalle eine stetige Funktion von x ist.

Hiermit haben wir das Theorem gewonnen:

Satz I. Die Funktion $f(x)$ sei in einem bestimmten Intervalle stetig und positiv; x_0 und x seien Werte innerhalb dieses Intervalles und $x > x_0$. Alsdann giebt es immer eine und nur eine stetige Funktion $F(x, x_0)$, welche für $x = x_0$ verschwindet und deren Ableitung nach x gleich $f(x)$ ist. Diese ist gegeben durch die Formel:

$$(1) \quad F(x, x_0) = \lim_{n=\infty} \{f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(x - x_{n-1})\},$$

in der $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ irgend welche Werte zwischen x_0 und x bedeuten.

Durch unsere Betrachtungen haben wir gleichzeitig eine präcise Definition des Flächeninhaltes bei einer stetigen Kurve gewonnen. Wir können sagen:

Satz II. Die Kurve $y = f(x)$ sei stetig und positiv in dem Intervalle von $x = x_0$ bis $x = x$. Konstruiert man alsdann die eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone mit den Inhalten $\Phi_n(x, x_0)$ und $\Psi_n(x, x_0)$, von denen oben die Rede war, und die von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x reichen, so haben diese Inhalte bei unendlich grofser Zahl n der Teilpunkte einen und denselben gemeinsamen Grenzwert, und dieser heifst der Flächeninhalt desjenigen Flächenstückes, das durch die Kurve $y = f(x)$ und die Abscissenachse einerseits und durch die Ordinaten in x_0 und x andrerseits begrenzt ist.

409. Bezeichnung des bestimmten Integrales. Nach dem soeben Bewiesenen ist unter den angegebenen Voraussetzungen $F(x, x_0)$ immer dasjenige Integral von $f(x)$, welches für $x = x_0$ den Wert null annimmt. Man bezeichnet dies durch:

(1) $$F(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

x und x_0 heifsen die *Grenzen* des Integrales und zwar x die *obere*, x_0 die *untere* Grenze.

Ist $F(x)$ irgend ein anderes Integral von $f(x)$, so ist nach Nr. 402:

(2) $$F(x, x_0) = F(x) - F(x_0).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

Das zwischen den Grenzen x_0 und x genommene Integral ist null, wenn x_0 mit x zusammenfällt.

Dem Herkommen gemäfs unterscheidet man zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral. Das erstere ist dasjenige Integral von $f(x)$, dessen obere und untere Grenze feste, gegebene Zahlen x_0 und x sind. Das letztere repräsentiert die Gesamtheit aller Integrale, deren Ableitung $f(x)$ ist und die sich daher aus dem vorigen durch Addition einer willkürlichen Konstanten ergeben.

410. Befreiung von beschränkenden Voraussetzungen. Der in Nr. 408 bewiesene Satz I. ist thatsächlich unter weit allgemeineren Voraussetzungen erwiesen, als unter denen wir ihn ausgesprochen haben.

Die speciellen Annahmen nämlich, dafs $f(x)$ in dem Intervalle (x_0, x) immer positiv und $x > x_0$ ist, haben wir nur deshalb eingeführt, um den Beweisgang anschaulich an der Figur verfolgen zu können. Prüft man aber die analytische Entwickelung für sich allein, so wird man finden, dafs bei ihr nur die Stetigkeit der Funktion $f(x)$, nicht aber ihr Vorzeichen oder das Zeichen von $x - x_0$ in Betracht kommt. Es besteht nur der eine Unterschied, dafs bei $x < x_0$ die Funktionen Φ_n und Ψ_n ihre Rolle vertauschen und $\Psi_n < F_n < \Phi_n$ wird. Dies ändert aber nichts an den weiteren Schlüssen. Wir schliefsen hieraus:

Der Satz I der Nr. 408 gilt für jede Funktion $f(x)$, die in dem Integrationsintervalle (x_0, x) stetig ist.

Mit dem Satze I bleiben auch die aus ihm gezogenen Folgerungen bestehen. Es ist daher, wenn $F(x)$ irgend ein

Integral von $f(x)$ ist, das zwischen x_0 und x genommene Integral:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0),$$

wie in der vorigen Nummer gezeigt wurde. Setzen wir in dieser Gleichung für (x_0, x) der Reihe nach (x_0, a), (a, b) $\ldots (k, l)$, (l, x), wo $a, b, \ldots k, l$ irgend welche Stellen im Integrationsintervall sind, so erhalten wir:

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(x_0)$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{k}^{l} f(x)\,dx = F(l) - F(k)$$

$$\int_{l}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(l).$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$\int_{x_0}^{a} + \int_{a}^{b} + \cdots + \int_{l}^{x} = F(x) - F(x_0),$$

wobei wir der Bequemlichkeit halber den sich immer wiederholenden Integranden $f(x)\,dx$ nicht hingeschrieben haben. Die rechte Seite ist aber $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, also gilt die sogenannte:

Additionsformel: $$\int_{x_0}^{a} + \int_{a}^{b} + \cdots + \int_{l}^{x} = \int_{x_0}^{x}.$$

Im Falle von 2 Summanden und unter beschränkenderen Voraussetzungen haben wir diese Gleichung bereits in Nr. 407 bewiesen.

Setzt man im Besonderen $a = x$, $b = x_0$ und beschränkt sich auf zwei Summanden, so folgt:

$$\int_{x_0}^{x} + \int_{x}^{x_0} = \int_{x_0}^{x_0}$$

Das Integral rechter Hand ist aber nach dem Satze der Nr. 409 gleich null, also folgt:

$$\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx; \quad \text{d. h.:}$$

Das bestimmte Integral ändert sein Vorzeichen, wenn seine beiden Grenzen vertauscht werden.

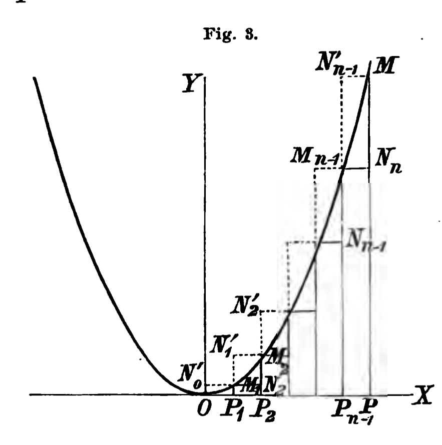
§ 3. Anwendungen.

411. Quadratur der Parabel. Wir betrachten die Parabel. Die Kurve hat, bezogen auf ihre Achse und die Scheiteltangente, die Gleichung:

$$y = \frac{x^2}{2p};$$

p ist der Parameter.

Fig. 3.



Wir wollen die Fläche OPM bestimmen, welche zwischen der Kurve, der Tangente $OP = x$ und der Ordinate $PM = y$ liegt. Wir teilen die Abscisse $OP = x$ in n gleiche Teile. Alsdann wird:

$$OP_1 = P_1P_2 = \cdots = P_{n-1}P = \frac{x}{n};$$

ihnen entsprechen die Ordinaten:

$$0,\; P_1M_1 = \frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2,\quad P_2M_2 = \frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{2x}{n}\right)^2, \cdots PM = \frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{nx}{n}\right)^2.$$

Daher wird die Fläche des „eingeschriebenen Polygons“ $OP_1M_1N_2 \ldots M_{n-1}N_nPO$:

$$\Phi_n = \frac{x}{n}\cdot 0 + \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2p}\left(\frac{1x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{x}{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2$$

und die des „umgeschriebenen Polygons“

$$ON_0'M_1N_1'\cdots N_{n-1}'MPO:$$

$$\Psi_n = \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2p}\left(\frac{1x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2p}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2p}\left(\frac{nx}{n}\right)^2.$$

Die Ausdrücke für Φ_n und Ψ_n vereinfachen sich erheblich. Es wird:

$$\Phi_n = \frac{1}{2p}\frac{x^3}{n^3}(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$$

und

$$\Psi_n = \frac{1}{2p}\frac{x^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

Nun gelten bekanntlich die Summenformeln:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-\frac{1}{2})(n-1)}{3},$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})n}{3}.$$

Also wird:

$$\Phi_n = \frac{x^3}{6pn^3}\left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}\right) = \frac{x^3}{6p}\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right),$$

$$\Psi_n = \frac{x^3}{6pn^3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}\right) = \frac{x^3}{6p}\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right).$$

Ist daher F der gesuchte Flächeninhalt, so wird:

$$\frac{x^3}{6p}\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) < F < \frac{x^3}{6p}\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right).$$

So erhält man für $n = 100$:

$$0{,}98505\cdot\frac{x^3}{6p} < F < 1{,}01505\cdot\frac{x^3}{6p},$$

und für $n = 10000$ auf 5 Dezimalen genau:

$$0{,}99985\cdot\frac{x^3}{6p} < F < 1{,}00015\cdot\frac{x^3}{6p}.$$

Für $n = \infty$ erhalten beide Grenzen denselben Wert, nämlich $\frac{x^3}{6p}$ und also wird:

$$F = \int_0^x \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{x^3}{6p}.$$

Offenbar haben wir hier dasjenige Integral erhalten, welches für $x = 0$ verschwindet, wir haben also:

$$\int_0^x \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{x^3}{6p}.$$

In der That wird:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{6p}\right) = \frac{x^2}{2p}.$$

412. Die Fundamental-Integrale. Wir müssen zunächst die Resultate wiederholen, zu denen wir bei der Differentiation der einfachen Funktionen gelangt sind; denn diese lehren uns die Integrale kennen, welche sich durch diese einfachen Funktionen ausdrücken lassen. Es ist:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n, \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d\,\mathrm{cotg}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{mx}}{m} = e^{mx}, \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\frac{d\,\mathrm{arc}\sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\frac{d\,\mathrm{arc}\cos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{cotg}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2};$$

und hieraus folgt unmittelbar, wenn man mit C eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x + C;$$

$$\int e^{mx}dx = \frac{e^{mx}}{m} + C, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc}\sin x + C = -\mathrm{arc}\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\,x + C = -\mathrm{arc}\,\mathrm{cotg}\,x + C.$$

Man kann auch, indem man mit x_0 einen beliebigen Wert bezeichnet, die Gleichungen bilden:

$$\int_{x_0}^{x} x^n\,dx = \frac{x^{n+1} - x_0^{\,n+1}}{n+1},$$

$$\int_{x_0}^{x} e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx} - e^{mx_0}}{m},$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = lx - lx_0 = l\,\frac{x}{x_0}.$$

Die letzte Gleichung dieser Gruppe ist in der ersten enthalten und folgt aus dieser, wenn man $n+1$ nach null konvergieren läſst; denn es wird nach der allgemeinen Regel (Nr. 129):

$$\lim_{n+1=0} \frac{x^{n+1} - x_0^{\,n+1}}{n+1} = \lim_{n+1=0} \frac{x^{n+1} lx - x_0^{\,n+1}\, lx_0}{1} = lx - lx_0.$$

Ist n negativ, so darf das Intervall von x_0 bis x, damit x^n stetig ist, nicht den Wert 0 enthalten; also müssen in diesem Falle bei der ersten der genannten Gleichungen x_0 und x von einerlei Zeichen sein; dasselbe gilt auch bei der dritten Gleichung.

Setzt man im Besonderen $x_0 = 1$, so ist

$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{x} = lx, \qquad (x > 0).$$

Desgleichen findet man für $x_0 = 0$:

$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x, \quad \int_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x.$$

Die Funktion lx und ebenso die cyklometrischen Funktionen, wie arc tang x, arc sin x, sind Integrale von algebraischen Funktionen, wie bereits früher (Nr. 53) bemerkt worden ist, und wenn die Theorie dieser Funktionen nicht schon vorher in der Algebra und Trigonometrie begründet worden wäre, so würden sie sich in der Integralrechnung als neue unerläſsliche Elemente der Analysis darstellen. Diese Bemerkung läſst uns schon jetzt vorhersehen, daſs durch die Integration unendlich viele neue Funktionen entstehen, welche nicht auf die bereits bekannten zurückführbar sind, wodurch sich für die Analysis ein unbegrenztes Feld von Untersuchungen eröffnet.

§ 4. Verwandlung von Differentiationsregeln in Integrationsregeln.

413. Allgemeine Methode. Die beiden vorigen Paragraphen haben uns zweierlei gelehrt. Einmal besitzt jede stetige Funktion ein Integral; zweitens wissen wir, daſs Differentiieren und Integrieren inverse Operationen sind. Der letztere Umstand führt uns sofort zu der Frage, inwieweit wir Rechnungsregeln oder Sätze der Differentialrechnung in Sätze der Integralrechnung verwandeln können. Die Methode, nach der diese Übertragung zu geschehen hat, liegt auf der Hand. Ist

$$(1) \qquad F(x,\, U,\, V,\, W \ldots,\, U',\, V',\, W' \ldots) = 0$$

irgend eine Identität, die zwischen den Funktionen U, V, $W\ldots$ von x und deren Ableitungen besteht, so brauchen wir nur zu setzen:

$$U' = u, \qquad V' = v, \qquad W' = w, \ldots$$
$$U = \int u\,dx, \quad V = \int v\,dx, \quad W = \int w\,dx, \ldots$$

indem wir über die Integrationskonstanten den Umständen gemäſs verfügen und erhalten:

$$(2) \qquad F\left(x, \int u\,dx, \int v\,dx, \int w\,dx \ldots u,\, v,\, w \ldots\right) = 0,$$

eine Relation der Integralrechnung.

Es fragt sich nur, unter welchen Umständen unser Übertragungsprinzip anwendbar sein wird. Das wird von den Voraussetzungen abhängen, unter denen die Gleichung (1) besteht. Richten wir unser Augenmerk auf die Entwickelungen Kap. II § 1 u. § 2 der Differentialrechnung, so muſsten die dort auftretenden Funktionen U, V, W, ... der Forderung 𝔄 (Nr. 27) genügen; d. h. sie muſsten nebst ihrer Ableitung bestimmte endliche Werte besitzen. Diese Forderung ist gewiſs erfüllt, sobald die Ableitungen U', V', W', ... stetig sind. Demnach wird die durch unser Übertragungsprinzip gewonnene Gleichung (2) jedenfalls dann gelten, wenn die in ihr auftretenden Funktionen u, v, w, ... die Forderung erfüllen:

Forderung 𝔖. *Die vorkommenden Funktionen sind stetig in dem betrachteten Intervalle.*

Wir setzen hiermit ausdrücklich fest, daſs von jetzt an die Forderung 𝔖 so lange als erfüllt angesehen werden soll, als nicht das Gegenteil bemerkt ist, und stellen uns nun die Aufgabe, die Differentiationsregeln des Kap. II § 2 der Differentialrechnung soweit als möglich in Integrationsregeln zu verwandeln.

414. Die Integration einer Summe. Sind $u, v, w, \dots s$ gegebene Funktionen von x, und

$$y = u + v + w + \cdots + s,$$

so ist das unbestimmte Integral der Funktion y gleich:

$$\int y\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \cdots + \int s\,dx;$$

denn die beiden Seiten dieser Gleichung haben die gleiche Ableitung, und können also nur um eine Konstante differieren; jedes Integral enthält aber zugleich eine willkürliche Konstante.

Soll dasjenige Integral von y bestimmt werden, welches für $x = x_0$ verschwindet, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{x_0}^{x} u\,dx + \int_{x_0}^{x} v\,dx + \int_{x_0}^{x} w\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} s\,dx,$$

weil beide Seiten dieser Gleichung für $x = x_0$ null werden.

415. Integration eines Produktes oder teilweise Integration. Das Verfahren der sogenannten teilweisen (partiellen) Integration, welches häufig zur Anwendung kommt und wertvolle Ergebnisse liefert, besteht in folgendem: Sind u und v zwei Funktionen der Variabeln x, so ist

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Wir setzen dabei unseren Verabredungen gemäſs voraus, daſs u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ in dem betrachteten Intervalle die Forderung 𝔖 erfüllen, also stetig sind. Bildet man das unbestimmte Integral von jeder Seite, so folgt:

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx,$$

oder

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx. \tag{1}$$

Eine Konstante braucht man nicht hinzuzufügen, weil jedes Integral schon eine willkürliche Konstante mit sich führt.

Die gewonnene Gleichung drückt die Regel der teilweisen Integration aus. Ist nämlich y eine gegebene Funktion, so sucht man diese derart in zwei Faktoren zu zerlegen, daſs der eine Faktor die Ableitung einer bekannten Funktion v wird. Bezeichnet man dann mit u den andern Faktor, so ist:

$$y = u \frac{dv}{dx},$$

und nun wird, gemäſs der Gleichung (1), das Integral von y in zwei Teile zerlegt, nämlich in einen integrierten Teil uv und einen noch zu integrierenden $-\int v \frac{du}{dx} dx$. Auf die Integration von $v \frac{du}{dx}$ ist also die von y oder $u \frac{dv}{dx}$ zurückgeführt, und wenn die neue Funktion einfacher ist als die ursprüngliche, so ist die Anwendung dieses Verfahrens von Vorteil. Will man das Integral der Gleichung (1) derart bestimmen, daſs es für $x = x_0$ null wird, so muſs man sich Rechenschaft geben von der willkürlichen Konstanten, die nun mit einem der beiden Integrale verbunden ist, z. B. dem auf der rechten Seite. Man kann setzen:

$$\int_{x_0}^{x} u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int_{x_0}^{x} v \frac{du}{dx} dx + \text{Const.},$$

und da für $x = x_0$ die linke Seite, sowie das Integral auf der rechten Seite verschwinden, so wird:

$$0 = u_0 v_0 + C \quad \text{oder} \quad C = -u_0 v_0,$$

wenn man mit u_0 und v_0 die Werte bezeichnet, welche die Funktionen u und v für $x = x_0$ annehmen. Es ist demnach

$$\int_{x_0}^{x} u \frac{dv}{dx} dx = [uv - u_0 v_0] - \int_{x_0}^{x} v \frac{du}{dx} dx,$$

was man bisweilen auch in der Form schreibt:

$$\int_{x_0}^{x} u \frac{dv}{dx} dx = [u\,v]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} v \frac{du}{dx} dx.$$

Das Symbol $[uv]_{x_0}^{x}$ bezeichnet dann die Differenz $uv - u_0 v_0$ oder das Integral $\int_{x_0}^{x} \frac{d(uv)}{dx} dx$.

416. Der eine Faktor des Produktes ist eine Konstante. Um das Verfahren der partiellen Integration auf einen speziellen Fall anzuwenden, sei der eine Faktor des Produktes eine Konstante a, der andere u eine Funktion von x. Dann ist zu finden:

$$\int a u \, dx.$$

Setzt man:

$$\int u \, dx = w, \quad \text{also} \quad u = \frac{dw}{dx},$$

so wird:

$$\int a u \, dx = \int a \frac{dw}{dx} dx = a w - \int w \frac{da}{dx} dx.$$

Da aber die Ableitung von der Konstanten a null ist, so verschwindet der Integrand rechter Hand und es ist bis auf eine additive Konstante, wenn man für w wieder $\int u \, dx$ setzt:

$$\int a u \, dx = a \int u \, dx$$

und zwischen den Grenzen x_0 und x wird:

$$\int_{x_0}^{x} a u \, dx = a \int_{x_0}^{x} u \, dx.$$

Ist z. B:

$$y = u + v i, \quad \text{wo } i = \sqrt{-1},$$

so wird nach der eben erhaltenen Regel und nach Nr. 414:

$$\int y \, dx = \int u \, dx + i \int v \, dx,$$

oder:

$$\int_{x_0}^{x} y \, dx = \int_{x_0}^{x} u \, dx + i \int_{x_0}^{x} v \, dx.$$

417. Beispiele. Im Folgenden werden wir Gelegenheit haben, zahlreiche Anwendungen von diesem Integrationsverfahren zu machen; hier sollen nur einige Beispiele gegeben werden.

1. Betrachtet man das Integral

$$\int lx\,dx$$

und setzt man

$$u = lx, \quad v = x,$$

so folgt:

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int x\frac{dx}{x} = x\,lx - \int dx.$$

Das letzte Integral ist gleich x plus einer Konstanten. Also ist:

$$\int lx\,dx = x\,lx - x + C.$$

2. Im Integrale

$$\int x^m e^{-x}\,dx$$

zerlegen wir den Integranden in die beiden Faktoren

$$x^m, \quad e^{-x},$$

von denen der zweite die Ableitung von $-e^{-x}$ ist. Die Funktionen, welche wir u und v nannten, sind also hier x^m und $-e^{-x}$, und es wird:

$$\int x^m e^{-x}\,dx = -x^m e^{-x} + m\int x^{m-1} e^{-x}\,dx.$$

Das gegebene Integral ist demnach auf ein anderes derselben Form gebracht, welches sich nur dadurch von jenem unterscheidet, daſs der Exponent m durch $m-1$ ersetzt ist. Ist die Zahl m positiv und gröſser als eins, so ist das neue Integral einfacher als das erste; wenn dagegen m negativ ist, so findet das Umgekehrte statt; in diesem Falle kann man die Formel so ansehen, daſs das Integral der rechten Seite auf das erste zurückgeführt ist; schreibt man an Stelle von m den Exponenten $-m+1$, so ergiebt dieselbe Formel:

$$\int x^{-m} e^{-x}\,dx = \frac{x^{1-m} e^{-x}}{1-m} + \frac{1}{1-m}\int x^{1-m} e^{-x}\,dx.$$

Ist m eine ganze positive Zahl und setzt man zur Abkürzung:

$$u_m = \int_0^x x^m e^{-x}\,dx, \quad \alpha_m = -x^m e^{-x},$$

so ist nach der obigen Formel, weil α_m für $x = 0$ verschwindet,

$$u_m = \alpha_m + m u_{m-1};$$

giebt man also der Zahl m die Werte $1, 2, 3 \ldots$ bis m, so folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + u_0, \\ u_2 &= \alpha_2 + 2 u_1, \\ u_3 &= \alpha_3 + 3 u_2, \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ u_m &= \alpha_m + m u_{m-1}. \end{aligned}$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man sie mit $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \cdots \frac{1}{m!}$ multipliziert hat, so wird:

$$\frac{u_m}{m!} = u_0 + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2!} + \frac{\alpha_3}{3!} + \cdots \frac{\alpha_m}{m!}.$$

Es ist aber:

$$u_0 = \int_0^x e^{-x} dx = \left[- e^{-x}\right]_0^x = 1 - e^{-x},$$

also wird:

$$\frac{1}{m!}\int_0^x x^m e^{-x}\, dx = 1 - \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^m}{m!}\right] e^{-x}.$$

418. Integration der Funktion einer Funktion. Ein anderes Integrationsverfahren, welches wir noch anzugeben haben, besteht in der Änderung der unabhängigen Variabelen. Dieses und die teilweise Integration bilden die wichtigsten Hilfsmittel in dem Teile der Integralrechnung, mit welchem wir es hier zu thun haben.

Es sei $f(x)$ eine gegebene Funktion; führt man eine neue unabhängige Variabele t ein, welche mit x durch eine Gleichung

(1) $$x = \varphi(t)$$

verbunden ist, so ist

$$dx = \varphi'(t)\, dt,$$

und folglich wird

$$f(x)\, dx = f(\varphi[t])\, \varphi'(t)\, dt = \psi(t)\, dt.$$

Hieraus folgt:

(2) $$\int f(x)\, dx = \int \psi(t)\, dt.$$

Kann man die Funktion $\psi(t)$ integrieren und findet man

$$\int \psi(t)\,dt = \Psi(t) + \text{const},$$

so ist auch

$$\int f(x)\,dx = \Psi(t) + \text{const},$$

und setzt man für t seinen Wert als Funktion von x ein, so erhält man

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{const},$$

wobei $F(x)$ eine bekannte Funktion ist. *Dabei hat man indessen darauf zu achten, daſs die Beziehung zwischen den Variabelen x und t eine umkehrbar eindeutige ist in dem fraglichen Intervalle.* Denn wir muſsten erst vermöge (1) t statt x und sodann in $\Psi(t)$ wieder x statt t einführen.

Die Anwendung dieser Substitutionsmethode kann selbst dann von Nutzen sein, wenn sie auch nicht zu einer Integration der gegebenen Funktion führt. Sie läſst in der That in vielen Fällen das Integral $\int f(x)\,dx$ durch ein anderes einfacheres $\int \psi(t)\,dt$ ersetzen.

Soll das Integral von $f(x)$ derart bestimmt werden, daſs es für $x = x_0$ verschwindet, so muſs auch das Integral von $\psi(t)$ so bestimmt werden, daſs es für denselben Wert von x null wird. Wenn man also mit t_0 den Wert bezeichnet, welchen t erhält für $x = x_0$, so wird:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\,dt.$$

419. Beispiele. 1. In dem Integrale

$$\int (ax+b)^m\,dx$$

setzen wir:

$$ax + b = t, \quad x = \frac{t-b}{a}, \quad dx = \frac{dt}{a};$$

so folgt:

$$\int (ax+b)^m\,dx = \frac{1}{a}\int t^m\,dt = \frac{t^{m+1}}{(m+1)\,a} + \text{const},$$

oder:

$$\int (ax+b)^m\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)\,a} + \text{const}.$$

2. In dem Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

seien p und q feste Werte, so daſs $p^2 - 4q < 0$. Setzt man

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, t, \qquad dx = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, dt,$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel positiv gewählt sein mag, so ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Nun ist:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arc\,tang} t + \text{const},$$

und folglich:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \text{const}.$$

§ 5. Beziehungen zwischen Sätzen der Differentialrechnung und solchen der Integralrechnung.

420. Der Mittelwertsatz. Nachdem wir im vorigen Paragraphen eine Übertragung der Rechnungsregeln der Differentialrechnung vorgenommen haben, wollen wir jetzt auch die Sätze der Differentialrechnung, welche allgemeine Eigenschaften der Funktionen aussagen, in solche der Integralrechnung verwandeln, und aus ihnen weitere Folgerungen ziehen. In Betracht sollen namentlich die Sätze von Kap. II § 1 kommen. Diese basieren sämtlich auf dem Mittelwertsatze. Wir übertragen daher zuerst diesen in die Integralrechnung und gelangen so zu dem Satze:

Erfüllt $f(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis X die Forderung 𝔖, *so ist:*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = (X - x_0) f(x_1), \quad \textit{und} \quad x_0 < x_1 < X.$$

In der That, setzt man

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x),$$

so wird

$$f(x) = F'(x),$$

und die Anwendung des Mittelwertsatzes der Nr. 28 auf die Funktion $F(x)$ ergiebt:

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{X - x_0} = F'(x_1), \quad \text{wo } x_0 < x_1 < X.$$

Also wird:

$$F(X) - F(x_0) = (X - x_0)\,F'(x_1).$$

Führt man hierin an Stelle von $F(x)$ wieder $f(x) = F'(x)$ ein, so folgt unmittelbar die zu beweisende Gleichung.

421. Ein positiver Integrand giebt ein positives Integral. Eine Übertragung des Satzes der Nr. 30 ist der folgende:

Die Funktion $f(x)$ sei positiv und stetig in dem Intervalle von x_0 bis X, alsdann gilt Gleiches von $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

In der That, in dem fraglichen Intervalle hat die Funktion

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

eine positive Ableitung $F'(x) = f(x)$. Also nimmt nach Nr. 30 in ihm $F(x)$ beständig zu. Also ist auch

$$F(x) > F(x_0) = 0$$

positiv.

422. Der gröfsere Integrand giebt das gröfsere Integral. Eine wichtige Folgerung des letzten Satzes ist diese:

Sind $\varphi(x)$ und $f(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis X stetig, wobei $X > x_0$ sein soll, und ist für alle Werte x des Intervalles $f(x) > \varphi(x)$, so ist auch:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

In der That, da $f(x) - \varphi(x) > 0$ ist, so ist auch $\int_{x_0}^{X} (f(x) - \varphi(x))\, dx > 0$ nach dem vorigen Satze und daher auch $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx > \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx$.

Aus diesem Satze folgt weiter:

Folgerung. Ist $f(x)$ der Gröſse nach zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ enthalten, für alle Werte x zwischen x_0 und X, so ist auch $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ zwischen $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx$ und $\int_{x_0}^{X} \psi(x)\, dx$ enthalten, sobald nur die Forderung $\mathfrak{S}$ erfüllt ist.

423. Beispiel. Es sei das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^m}}$ gegeben, in welchem m gröſser als 2 ist. Es ist einleuchtend, daſs dieses Integral vergröſsert wird, wenn m verkleinert wird, und daſs es verkleinert wird, wenn m vergröſsert wird. Es ist also enthalten zwischen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. h. zwischen

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \text{und} \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0{,}523 \ldots$$

424. Ein neuer Mittelwertsatz. Aus dem Vorigen erhalten wir sofort folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Nr. 420:

Die Funktionen u und v mögen der Forderung $\mathfrak{S}$ genügen. Wenn nun die Funktion v bei allen Werten von x zwischen x_0 und X dasselbe Zeichen hat, so ist:

$$\int_{x_0}^{X} uv\, dx = U \int_{x_0}^{X} v\, dx.$$

Dabei bedeutet U einen Wert, der zwischen dem kleinsten und gröſsten Wert enthalten ist, den u in dem Intervalle annimmt.

In der That, sind A und B der Minimal- und der Maximalwert von u, so ist für alle x des Intervalles, wenn v positiv ist:

$$Av < uv < Bv$$

und wenn v negativ ist:

$$Av > uv > Bv.$$

Also ist der Wert des Integrales $\int_{x_0}^{X} uv\,dx$ zwischen $\int_{x_0}^{X} Av\,dx$ und $\int_{x_0}^{X} Bv\,dx$ enthalten; d. h. zwischen den Produkten, die man erhält, indem man A und B mit $\int_{x_0}^{X} v\,dx$ multipliziert. Setzt man $v = 1$, so erhält man den Mittelwertsatz der Nr. 420.

425. Neuer Beweis der Taylorschen Gleichung. Die Integralrechnung liefert einen sehr einfachen und eleganten Beweis für die Taylorsche Formel, die bekanntlich auch weiter nichts als ein verallgemeinerter Mittelwertsatz ist. Dieser Beweis wird ebenso wie bei den vorhergehenden Sätzen durch teilweise Integration erbracht.

Es seien x und h zwei gegebene Zahlen, t eine Variabele und $f(x+h-t)$ eine Funktion, von der wir voraussetzen, dafs sie nebst ihren n ersten Ableitungen für alle Werte t von 0 bis h stetig ist. Die teilweise Integration ergiebt alsdann, indem man mit $f'(x+h-t)$, $f''(x+h-t)\ldots$ die succesiven Ableitungen der Funktion $f(x+h-t)$ in Bezug auf die Variabele $x+h-t$ bezeichnet, die Gleichungen:

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = tf'(x+h-t) + \int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt,$$

$$\int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt = \frac{t^2}{2!}f''(x+h-t) + \int_0^t f'''(x+h-t)\,\frac{t^2}{2!}\,dt,$$

$$\int_0^t f'''(x+h-t)\,\frac{t^2}{2!}\,dt = \frac{t^3}{3!}f'''(x+h-t) + \int_0^t f^{IV}(x+h-t)\,\frac{t^3}{3!}\,dt,$$

. . . .

$$\int_0^t f^{(n-1)}(x+h-t)\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\,dt = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x+h-t) + \int_0^t f^{(n)}(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Addiert man alle diese Gleichungen und setzt dann $t = h$, so folgt, da

$$\int_0^h f'(x + h - t)\, dt = f(x + h) - f(x)$$

ist, die Gleichung:

$$(1)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

wobei

$$(2)\qquad R_n = \int_0^h f^{(n)}(x + h - t)\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

ist. Die Gleichung (1) führt zu der Taylorschen Reihe, wenn die Bedingung der Stetigkeit für alle Ableitungen, wie viele man auch bilden mag, erfüllt ist, und wenn der Rest R_n nach null konvergiert, wenn n unbegrenzt wächst. Die Gleichung (2) giebt einen neuen Ausdruck für diesen Rest, der bisweilen von Nutzen ist, und aus dem man auch die früheren (Nr. 112 u. 113) ableiten kann. Denn es folgt aus dem Satze der Nr. 424:

$$R_n = U \int_0^h \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \frac{h^n}{n!}\, U.$$

U bedeutet einen mittleren Wert der Funktion $f^{(n)}(x + h - t)$ im Intervalle von $t = 0$ bis $t = h$. Ist diese Ableitung stetig, wie wir hier annehmen, so nimmt sie diesen mittleren Wert auch für einen bestimmten Wert von t an. Es ist also:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h).$$

Desgleichen erhält man die andere Form des Restes:

$$R_n = f^{(n)}(x + h - \theta h) \cdot \frac{(\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^h dt = \frac{h^n (1 - \theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x + h\theta').$$

426. Die Integration einer unendlichen Reihe.

Satz. Es sei $f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *eine unendliche Reihe, deren Glieder stetige Funktionen einer Variabelen* x *sind. Die Reihe sei gleichmäſsig konvergent bei allen Werten von* $x = x_0$ *bis zu* $x = X$. *Alsdann ist auch die Reihe:*

$$\int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \int_{x_0}^{x} u_3\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \cdots$$

in dem Intervalle (x_0, x) *gleichmäßsig konvergent und ihre Summe ist gleich dem Integrale*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Denn setzt man:

$$(1)\qquad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + r_n,$$

wobei x die Werte von x_0 bis zu irgend einem Werte kleiner als X durchläuft, so ist:

$$(2)\ \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{x} r_n\,dx.$$

Nun ist aber (Nr. 424):

$$\int_{x_0}^{x} r_n\,dx = \varrho_n \int_{x_0}^{x} dx = \varrho_n (x - x_0),$$

wenn ϱ_n einen Wert bezeichnet, der zwischen dem größsten und kleinsten Werte der Funktion r_n, während x von x_0 bis x variiert, gelegen ist. Diese Werte sind aber, da die Reihe gleichmäßsig konvergiert, nach der in Nr. 363 gegebenen Definition der gleichmäßsigen Konvergenz absolut beide kleiner als die beliebig kleine Zahl σ, wenn n hinreichend grofs gewählt ist; und folglich ist auch $|\varrho_n| < \sigma$. Daraus folgt, dafs in der Gleichung (2) die Differenz des Integrales links und der n ersten Integrale rechts bei hinreichend grofsem n beliebig klein wird, d. h. dafs die Gleichung besteht:

$$(3)\ \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \cdots \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \cdots,$$

wobei die Reihe rechter Hand in dem Intervalle (x_0, X) *gleichmäßsig* konvergiert.

427. Folgesatz über die Differentiation einer unendlichen Reihe. Der soeben bewiesene Satz enthält eine Integrationsregel; indem wir jetzt unser Umkehrungsprinzip in

entgegengesetztem Sinne verwenden, erhalten wir einen Satz über die Differentiation einer unendlichen Reihe, welcher ein früher bewiesenes Theorem als Spezialfall enthält. Der Satz lautet:

Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *sei so beschaffen, dafs die Reihe ihrer Ableitungen* $u_0' + u_1' + u_2' + \cdots$ *in dem Intervalle* (x_0, X) *lauter stetige Summanden hat und dafs sie in ihm gleichmäfsig konvergiert. Alsdann ist deren Summe* $f'(x)$ *die Ableitung der Summe* $f(x)$ *der Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen, wenn man dort u' für u schreibt. Im Falle, dafs $u_n = c_n \cdot (x - x_0)^n$ ist, entsteht eine Potenzreihenentwickelung, für die der schon in Nr. 369 erwiesene Satz gilt, der unmittelbar aus dem hier bewiesenen Theoreme folgt.

428. Beispiele. 1. Man erhält durch Division:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

und diese Reihe ist konvergent für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als 1. Multipliziert man mit dx und integriert teilweise von $x = 0$ an, so wird:

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

bei allen Werten von x, deren Betrag kleiner ist als eins. Aber die Gleichung besteht auch noch für $x = +1$, denn die Reihe ist auch für diesen Grenzwert noch konvergent (Bd. I, Bemerkung zu Nr. 126). Es ist also:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2. Nach der Binomialformel ist für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als 1:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots$$

Durch teilweise Integration von $x = 0$ an folgt also:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

eine Gleichung, die nicht nur für alle Werte von x zwischen

-1 und $+1$, sondern auch noch für $x = \pm 1$ besteht. Setzt man $x = 1$, so folgt:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \cdots \,.$$

Aufser den beiden für die Zahl π hier aufgestellten Formeln lassen sich aus diesen Reihen noch andere rascher konvergente bilden. Dafs die Zahl π eine irrationale ist, wurde nicht aus diesen Summenreihen erkannt, sondern von Lambert mit Hilfe einer Kettenbruchentwickelung bewiesen; dafs dieselbe überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann, hat Herr Lindemann (Math. Annal. Bd. 20) durch eine Verallgemeinerung des Hermiteschen Verfahrens bezüglich der Zahl e gezeigt, und damit die Unmöglichkeit der geometrischen Quadratur des Kreises bewiesen.

Zweites Kapitel.

Die Integration bekannter Funktionen.

429. Ziel der Entwickelungen dieses Kapitels. Welches auch die explicite oder implicite Funktion $f(x)$ der reellen Variabelen x sein mag, es existiert, solange sie in einem bestimmten Intervalle stetig ist, wie wir gesehen haben, immer eine stetige Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist und welche für einen gegebenen, diesem Intervalle angehörigen Wert x_0 von x verschwindet. Wir sind übereingekommen, diese Funktion mit

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

zu bezeichnen. Es entsteht nun weiter die Aufgabe, diese Funktion womöglich vermittelst der bekannten elementaren Funktionen, d. h. der *algebraischen*, der *logarithmischen*, der *Exponential-* oder *Kreisfunktionen* auszudrücken. Diese Untersuchung ist das, was man im engeren Sinne die *Integration* oder die *Quadratur* von $f(x)$ nennt; sie bildet den Inhalt der Entwickelungen, welche wir zunächst auszuführen haben, die aber notwendig nur auf eine kleine Zahl von Fällen sich beschränken.

§ 1. Integration der rationalen Funktionen.

430. Ausführung der Integration. Soeben haben wir uns die Aufgabe gestellt, die Integrale der „bekannten“ Funktionen zu studieren und womöglich selbst auf bekannte Funktionen zurückzuführen. Wir behandeln in diesem Paragraphen zunächst den einfachsten Fall, dafs der Integrand eine *rationale* Funktion ist.

Jede rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ der Variabelen x läſst sich (Nr. 385) zerlegen in eine ganze Funktion, welche null wird, falls der Quotient ein echt gebrochener ist, und in Partialbrüche, deren Zähler konstant sind, und deren Nenner die Potenzen der linearen Binome enthält, welche die Faktoren von $f(x)$ bilden. Setzt man

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda,$$

so wird

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m \\
&+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\
&+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Es ist nun:

$$\int x^\mu \, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{const},$$

und wenn μ von 1 verschieden ist:

$$\int \frac{dx}{(x-g)^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1)(x-g)^{\mu-1}} + \text{const},$$

während für den Fall $\mu = 1$

$$\int \frac{dx}{x-g} = l(x-g) + \text{const}$$

wird. Integriert man also die beiden Seiten der Gleichung (1), so folgt:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \frac{a_0}{m+1} x^{m+1} + \frac{a_1}{m} x^m + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2} x^2 + a_m x + \text{const} \\
&- \frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} - \cdots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1} l(x-a) \\
&- \frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \frac{B_1}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} - \cdots - \frac{B_{\beta-2}}{x-\beta} + B_{\beta-1} l(x-b) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \frac{L_1}{(\lambda-2)(x-l)^{\lambda-2}} - \cdots - \frac{L_{\lambda-2}}{x-l} + L_{\lambda-1} l(x-l).
\end{aligned}
$$

Aus dieser Formel folgt der Satz:

Das Integral einer rationalen Funktion ist immer durch algebraische und logarithmische Funktionen darstellbar. Die explicite Darstellung erfordert die Zerlegung des Nenners der gebrochenen Funktion in seine Primfaktoren.

431. Bedingung dafür, dafs das Integral einer rationalen Funktion selbst rational ist. Soll das Integral der rationalen Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ rational sein, so darf die Entwickelung des Quotienten in seine Partialbrüche keine Glieder enthalten, deren Nenner vom ersten Grade sind. In den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sind also diese Bedingungen:

$$A_{\alpha-1} = 0, \qquad B_{\beta-1} = 0, \qquad C_{\gamma-1} = 0 \ldots$$

Dies erfordert vor allem, dafs das Polynom $f(x)$ keine linearen Faktoren in erster Potenz enthält. In Nr. 391 haben wir gesehen, dafs, wenn man setzt:

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \qquad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)} \ldots$$

die Koeffizienten $A_{\alpha-1}$, $B_{\beta-1} \ldots$ die Werte erhalten:

$$A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!}, \qquad B_{\beta-1} = \frac{\psi^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!} \ldots$$

Mithin ist $\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$ algebraisch, wenn

$$\varphi^{(\alpha-1)}(a) = 0, \qquad \psi^{(\beta-1)}(b) = 0, \ldots$$

sind, mögen nun die Werte der Wurzeln $a, b, c \ldots$ reell oder komplex sein.

Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist eben so grofs wie die Anzahl der Wurzeln $a, b, c \ldots l$. Ist aber der Grad der Funktion $F(x)$ mindestens um zwei Einheiten kleiner, als der von $f(x)$, so ist eine dieser Bedingungen in den anderen enthalten. Denn bezeichnet man mit m den Grad von $f(x)$ und nimmt man an, dafs $F(x)$ höchstens vom Grade $m-2$ ist, so enthält der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ keinen ganzen algebraischen Bestandteil. Bringt man nun alle Partialbrüche auf den gleichen Nenner und vergleicht ihre Summe mit dem Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$,

so sieht man leicht, dafs der auf diese Weise gebildete Bruch im Zähler die Potenz x^{m-1}, multipliziert mit dem Koeffizienten

$$A_{\alpha-1} + B_{\beta-1} + \cdots + L_{\lambda-1}$$

enthält. Dieser Koeffizient mufs null sein, weil $F(x)$ höchstens vom Grade $m - 2$ ist; also ist

$$\frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!} + \frac{\psi^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!} + \cdots + \frac{\tilde{\omega}^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!} = 0,$$

und sonach ist eine der Bedingungen dafür, dafs $\int \frac{F x)}{f(x)} dx$ algebraisch wird, in den anderen enthalten.

Die vorstehende Gleichung umfafst als besonderen Fall die in Nr. 387 gegebene Formel.

432. Vermeidung der komplexen Zahlen bei der Integration. Wenn unter den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ etwelche komplex sind, so enthält das Integral Logarithmen von komplexen Werten. Man kann diese indessen durch Kreisfunktionen ersetzen, wenn man die im 8[ten] Kapitel dieses Bandes gegebenen Formeln benutzt. Auf diese Weise erhält man ein reelles Resultat, sobald nur die Koeffizienten der Polynome $F(x)$ und $f(x)$ reell sind. Ist dieses der Fall, so kann man aber auch nach den Formeln der Nr. 395 des ersten Bandes die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ so zerlegen, dafs nur reelle Werte in den Partialbrüchen auftreten, und es ist leicht, auf Grund dieser neuen Zerlegung die Integration auszuführen.

Bei dieser Zerlegung enthält der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ aufser den Gliedern derselben Form, wie in Nr. 430, noch andere von der Form

$$\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n},$$

wobei P und Q reelle Konstante sind, und $x^2 + px + q$ das Produkt zweier linearer Faktoren bedeutet, welche zu zwei konjugiert komplexen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gehören. Hinsichtlich der ersten Glieder haben wir in Bezug auf die Integration dem früher Gesagten nichts hinzuzufügen; es handelt sich also nur um die Integrale von der Form:

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{Px+Q}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}\,dx.$$

Durch die Substitution

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,t$$

wird dies Integral gleich

$$\frac{P}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{n-1}}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n} + \frac{Q-\frac{1}{2}Pp}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Da nun $t\,dt = \frac{1}{2}\,d(t^2+1)$ ist, so erhält man, wenn $n>1$ ist:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \text{const},$$

und wenn $n=1$ ist:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\,l(t^2+1) + \text{const}.$$

Es ist also nur noch das Integral

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

zu bestimmen. Führt man im Zähler des Integranden den Faktor $(t^2+1)-t^2=1$ ein, so folgt

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n}.$$

Es ist nun

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int t\,\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n},$$

und

$$\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n} = d\left[-\frac{1}{(n-1)(t^2+1)^{n-1}}\right],$$

also ergiebt die teilweise Integration:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Demnach wird

$$(1)\quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Schreibt man an Stelle von n die Exponenten $n-1$, $n-2, \ldots 2$, so folgt

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} = \frac{t}{2(n-2)(t^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-2}}.$$

. . . .

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} t + \text{const.}$$

Addiert man diese Gleichungen zu (1), nachdem sie mit

$$\frac{2n-3}{2n-2}, \quad \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)} \cdots \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}$$

multipliziert sind, so wird:

$$(2) \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \left[\frac{1}{2n-2} \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \frac{t}{(t^2+1)^{n-2}} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \frac{t}{t^2+1}\right] + \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \operatorname{arc\,tang} t + \text{const.}$$

Will man also nur reelle Gröfsen in das Integral eines rationalen Differentiales mit reellen Koeffizienten einführen, so mufs man sagen, dafs dasselbe durch *rationale*, *logarithmische* und *cyklometrische* Funktionen darstellbar ist.

§ 2. Integration algebraischer Funktionen durch bekannte Funktionen.

433. Der Integrand ist rational in $\sqrt[m]{ax+b}$. Wir haben die Hauptfälle zu untersuchen, bei denen sich eine algebraische Funktion durch Änderung der Variabelen in eine rationale verwandeln läfst.

Diese Reduktion gelingt unmittelbar, sobald die Funktion $f(x)$ eine rationale Funktion von ganzen oder gebrochenen Potenzen der Variabelen x ist. Denn bezeichnet man in solchem Falle mit m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner sämtlicher Exponenten von x, welche in $f(x)$ vorkommen, so hat man

$$x = t^m, \qquad dx = m t^{m-1}\, dt$$

zu setzen, und es wird

$$f(x)\, dx = m f(t^m)\, t^{m-1}\, dt$$

ein rationales Differential.

Dieselbe Transformation bewirkt auch die gewünschte Reduktion, wenn allgemeiner $f(x)$ eine rationale Funktion von x und von gebrochenen Potenzen des Binomes $ax+b$ ist. Ist m durch sämtliche Nenner dieser Exponenten teilbar, und setzt man

$$ax+b=t^m,\qquad x=\frac{t^m-b}{a},\qquad dx=\frac{m}{a}t^{m-1}dt,$$

so wird durch diese Substitution

$$f(x)\,dx=\varphi(t)\,dt$$

und $\varphi(t)$ eine rationale Funktion.

434. Beispiele. Das Differential

$$\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

wird, wenn man

$$x=t^6,\qquad dx=6t^5\,dt$$

setzt, gleich:

$$6\frac{t^8+t^5}{t^2+1}dt=6(t^6-t^4+t^3+t^2-t-1)\,dt+\frac{6t\,dt}{t^2+1}+\frac{6\,dt}{t^2+1};$$

also ist:

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3-3t^2-6t+3l(t^2+1)+6\operatorname{arc\,tang}t+C,$$

und setzt man an Stelle von t seinen Wert $x^{\frac{1}{6}}$:

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{4}{6}}+2x^{\frac{3}{6}}-3x^{\frac{2}{6}}-6x^{\frac{1}{6}}$$
$$+3\,l(x^{\frac{2}{6}}+1)+6\operatorname{arc\,tang}x^{\frac{1}{6}}+C.$$

Bemerkung. $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x}$ sind vieldeutig; dem entsprechend ist auch das Integral des gegebenen Differentiales vieldeutig. Beschränkt man sich auf reelle Werte desselben, so ist x positiv zu nehmen, und ist $\sqrt{x}$ positiv, $\sqrt[3]{x}$ die reelle Wurzel, so entspricht jedem Werte von x ein positiver Wert von t. Es ist dann für $t=x^{\frac{1}{6}}$ der eine positive reelle Wert zu wählen.

435. Der Integrand ist rational in x und $\sqrt{a+bx+cx^2}$. Der Fall, den wir hier zu behandeln haben, wird durch ein Differential von der Form

$$F(x,\,X)\,dx$$

dargestellt, in welchem X die Quadratwurzel aus einem Trinome zweiten Grades in x und $F(x, X)$ eine rationale Funktion von x und X ist.

Es sei

$$X = \sqrt{a + bx + cx^2}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist, wenn keine nähere Bezeichnung angegeben ist, immer positiv gedacht. Wenn der Koeffizient c gleich null ist, so genügt es, um das Differential rational zu machen:

$$a + bx = t^2, \qquad dx = \frac{2}{b} t\,dt$$

zu setzen. Wir nehmen also an, daſs c von null verschieden ist. Da man aus der Quadratwurzel einen Faktor absondern kann, der gleich ist der Quadratwurzel aus dem Betrage von c, so können wir auch immer

$$X = \sqrt{a + bx \pm x^2}$$

setzen. Die Fälle, daſs das Vorzeichen von x^2 positiv und negativ ist, sind gesondert zu betrachten.

436. Der Fall $c = 1$. Es sei zuerst

$$X = \sqrt{a + bx + x^2}.$$

Erste Transformation. Um das gegebene Differential rational zu machen, kann man $X = t \pm x$ setzen, wobei t die neue Variabele ist; wir wählen zum Beispiel

$$X = t - x.$$

Erhebt man diese Gleichung zum Quadrat, so folgt:

$$a + bx = t^2 - 2tx,$$

also:

$$x = \frac{t^2 - a}{2t + b}, \quad X = \frac{t^2 + bt + a}{2t + b}, \quad b\,dx = 2(t - x)\,dt - 2t\,dx,$$

oder

$$dx = \frac{2(t - x)}{2t + b} dt = \frac{2(t^2 + bt + a)}{(2t + b)^2} dt.$$

Die Substitution dieser Werte ergiebt

$$F(x, X)\,dt = \Phi(t)\,dt,$$

wobei $\Phi(t)$ eine rationale Funktion von t ist.

Zweite Transformation. Man kann auch die Substitution

$$X = \sqrt{a} + tx$$

anwenden; sind jedoch a und b reelle Gröfsen, und will man die Einführung komplexer Werte vermeiden, so ist diese Transformation nur für den Fall, dafs a positiv ist, zu gebrauchen. Erhebt man die Gleichung zum Quadrat, so wird

$$b + x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

also:

$$x = \frac{2t\sqrt{a} - b}{1 - t^2}, \quad X = \frac{t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a}}{1 - t^2}, \quad dx = 2dt\sqrt{a} + 2tx\,dt + t^2 dx,$$

oder:

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a} + tx}{1 - t^2}\,dt = \frac{2(t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a})}{(1 - t^2)^2}\,dt.$$

Die Substitution dieser Werte liefert ebenfalls

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

wobei $\Phi(t)$ eine rationale Funktion ist.

Der Zusammenhang zwischen den Variabelen t und x ist ein völlig eindeutiger, sobald das Vorzeichen von X fixiert ist.

Dritte Transformation. Eine dritte Transformation, welche wir noch anzugeben haben, ist reell, wenn die Gleichung $X^2 = 0$ reelle Wurzeln hat, was immer der Fall ist, sobald a negativ ist.

Sind dann x_0 und x_1 die beiden Wurzeln der Gleichung $X^2 = 0$, so dafs also

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x - x_1)}$$

ist, so setzt man, indem t die neue Variabele bezeichnet,

$$X = (x - x_0)\,t;$$

hieraus folgt durch Erhebung zum Quadrat

$$x - x_1 = (x - x_0)\,t^2,$$

also:

$$x = \frac{x_1 - x_0 t^2}{1 - t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0)\,t}{1 - t^2}, \quad dx = t^2 dx + 2t(x - x_0)\,dt,$$

oder:

$$dx = \frac{2t(x - x_0)}{1 - t^2}\,dt = \frac{2(x_1 - x_0)\,t}{(1 - t^2)^2}\,dt,$$

und es wird wiederum

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt$$

ein rationales Differential.

437. Beispiele. 1. Das Differential

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}$$

ergiebt nach der ersten Transformation:

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{2t + b} = l(2t + b) + C = l\left(X + x + \frac{b}{2}\right) + \text{const},$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = l\left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + \text{const};$$

nach der zweiten Transformation:

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{1 - t} + \int \frac{dt}{1 + t} = l\,\frac{1 + t}{1 - t} + \text{const}$$

$$= l\,\frac{x + X - \sqrt{a}}{x - X + \sqrt{a}} + \text{const};$$

nach der dritten Transformation:

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2} = l\,\frac{1 + t}{1 - t} + \text{const} = l\,\frac{x - x_0 + X}{x - x_0 - X} + \text{const}.$$

2. Das Integral

$$\int X\,dx = \int \sqrt{a + bx + x^2}\,dx$$

wird nach der ersten Transformation:

$$\int X\,dx = 2\int \frac{(t^2 + bt + a)^2}{(2t + b)^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{\left[\left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4}\right]^2}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{b}{2}\right) dt + \frac{1}{2}\left(a - \frac{b^2}{4}\right)\int \frac{dt}{t + \frac{b}{2}} + \frac{1}{4}\left(a - \frac{b^2}{4}\right)^2 \int \frac{dt}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{8}\left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a - \frac{b^2}{4}\right) l\left(t + \frac{b}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(a - \frac{b^2}{4}\right)^2 \frac{1}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^2} + \text{const}.$$

Die Gröfsen $t + \frac{b}{2}$ und $\dfrac{a - \frac{b^2}{4}}{t + \frac{b}{2}}$ sind aber bezüglich gleich

$$x + \frac{b}{2} + X \text{ und } \frac{a - \frac{b^2}{4}}{x + \frac{b}{2} + X} = -x - \frac{b}{2} + X, \text{ also ist:}$$

$$\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\sqrt{a+bx+x^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)l\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\text{const.}$$

Es ist indessen auch zu bemerken, dafs man das gegebene Integral auf dasjenige des ersten Beispieles vermittelst der teilweisen Integration reduzieren kann; denn es wird

$$\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx=x\sqrt{a+bx+x^2}-\int\frac{x^2+\frac{b}{2}x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx.$$

Nun ist

$$\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx=\int\frac{a+bx+x^2}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx,$$

und addiert man diese Gleichung zu der vorigen, so folgt:

$$2\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx=x\sqrt{a+bx+x^2}+\int\frac{a+\frac{b}{2}x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx.$$

Das Integral der rechten Seite ist gleich

$$\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}+\frac{b}{2}\int\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx.$$

Das erste Integral ist durch das Beispiel 1 berechnet, und das zweite hat, wie leicht ersichtlich, den Wert $\frac{b}{2}\sqrt{a+bx+x^2}$. So ergiebt sich das bereits gefundene Resultat.

3. Wir betrachten schliefslich noch das Integral

$$\int\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

das häufig auftritt, und das sich unmittelbar aus den Rechnungen, die wir zuletzt ausgeführt haben, ergiebt. Es ist

$$\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\left(\alpha-\frac{b\beta}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}+\beta\,\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

und demnach

$$\int\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx=\left(\alpha-\frac{b\beta}{2}\right)l\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\beta\sqrt{a+bx+x^2}+C.$$

438. Der Fall $c = -1$. Wir untersuchen nun den Fall, daſs

$$X = \sqrt{a + bx - x^2}$$

ist. Um das Differential $F(x, X)\,dx$ auf eine rationale Form zu bringen, kann man die zweite oder die dritte Transformation in Nr. 436 anwenden, wenn $a > 0$ ist. Ist aber $a < 0$, so muſs man sich auf die dritte Transformation beschränken, wenn man bloſs reelle Gröſsen einführen will.

1. Ist $a > 0$, und setzt man

$$X = \sqrt{a} + tx,$$

so wird, indem man das Quadrat bildet,

$$b - x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

also:

$$x = \frac{b - 2t\sqrt{a}}{1 + t^2},$$

$$X = \frac{\sqrt{a} + bt - t^2\sqrt{a}}{1 + t^2}, \qquad -dx = 2\sqrt{a}\,dt + 2tx\,dt + t^2\,dx,$$

oder

$$dx = -2\,\frac{\sqrt{a} + tx}{1 + t^2}\,dt = -2\,\frac{\sqrt{a} + bt - t^2\sqrt{a}}{(1 + t^2)^2}\,dt,$$

und die Substitution dieser Werte ergiebt:

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

wobei $\Phi(t)$ eine rationale Funktion ist.

2. Welches auch der Wert der Konstante a sein mag, wir dürfen immer annehmen, daſs die Gleichung $X^2 = 0$ reelle Wurzeln hat. Denn anderen Falles ist der Wert von X bei allen Werten von x imaginär. Zwar schlieſsen wir diesen Fall aus unserer Untersuchung nicht aus; indessen gehört er, da die Funktion X gleich $i\sqrt{-a - bx + x^2}$ ist, zu dem in Nr. 436 erledigten. Bezeichnen wir also mit x_0 und x_1 die Wurzeln von $X^2 = 0$, wobei wir annehmen, daſs $x_1 > x_0$ ist, so ist

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)}.$$

Die Transformation ergiebt sich nun, indem man setzt:

$$X = (x - x_0)\,t \quad \text{oder} \quad x_1 - x = (x - x_0)\,t^2,$$

also:

$$x = \frac{x_1 + x_0 t^2}{1+t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0)t}{1+t^2}, \quad -dx = 2t(x-x_0)dt + t^2 dx,$$

$$dx = -2\frac{t(x-x_0)}{1+t^2}dt = -2\frac{(x_1-x_0)t}{(1+t^2)^2}dt,$$

und es wird wiederum

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt$$

ein rationales Differential.

439. Vereinfachungen in besonderen Fällen. Die verschiedenen Transformationen lassen alle Integrale, die unter die behandelte Form fallen, lösen. Doch ist es nicht immer notwendig, sie anzuwenden, es können bisweilen andere Transformationen leichter eine Lösung herbeiführen.

Das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$$

ist z. B. gleich:

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}},$$

und man erkennt leicht, dafs sich dieses auf die elementare Form $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ bringen läfst, wenn man setzt:

$$x - \frac{b}{2} = t\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}, \quad dx = dt\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}.$$

Es wird:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + \text{const} = \arcsin\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}} + C.$$

Daraus folgt unmittelbar auch der Wert des Integrales

$$\int\frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{a+bx-x^2}}dx = \left(\alpha + \frac{b\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} - \beta\int\frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)}{\sqrt{a+bx-x^2}}dx.$$

Das erste Integral ist soeben bestimmt worden; das zweite hat den Wert

$$-\beta\sqrt{a + bx - x^2}.$$

440. Der Integrand ist rational in x, $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{a'+b'x}$. Auf eine rationale Form läſst sich auch das Differential

$$F(x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{a'+b'x})\,dx$$

bringen, wenn F eine rationale Funktion der drei Gröſsen x, $\sqrt{a+bx}$, $\sqrt{a'+b'x}$ bedeutet. Denn dieser Fall kommt auf die untersuchten zurück, wenn man

$$a'+b'x=t^2, \qquad x=\frac{t^2-a'}{b'}, \qquad dx=\frac{2}{b'}\,t\,dt$$

setzt. Das Differential geht alsdann über in die Form

$$\Phi(t, T)\,dt,$$

wobei T die Quadratwurzel aus einem Polynome zweiten Grades in t, und Φ eine rationale Funktion bezeichnet.

§ 3. Die elliptischen Integrale.

441. Definition der elliptischen Integrale. In dem vorigen Paragraphen haben wir hauptsächlich die Integrale der Form behandelt:

$$V=\int F(x, X)\,dx, \tag{1}$$

in denen F eine rationale Funktion und X die Quadratwurzel aus einem Polynome 2ten Grades bedeutete. Sie führten uns auf bekannte Funktionen zurück. In diesem Paragraphen werden wir ebenfalls uns mit Integralen der Form (1) beschäftigen. Es soll aber X die Quadratwurzel aus einem Polynome 3ten oder 4ten Grades bedeuten. In diesem Falle nennen wir V mit *Legendre* ein *elliptisches Integral.* Ein solches läſst sich im Allgemeinen nicht mehr auf bekannte Funktionen zurückführen, sondern definiert eine neue Transcendente.

Es sei

$$X=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}; \tag{2}$$

man darf dabei annehmen, daſs das Polynom unter der Wurzel keine vielfachen linearen Faktoren hat, denn sonst würde das Integral V zu der früheren Klasse (Nr. 433—439) gehören, und es lieſse sich lediglich durch rationale, logarithmische und

cyklometrische Funktionen darstellen. Auch sollen natürlich die beiden Koeffizienten ε und δ nicht zugleich null sein, dagegen kann $\varepsilon = 0$ sein.

Es handelt sich zunächst darum zu untersuchen, ob sich die Form des Integranden vereinfachen läſst. Wir wollen beweisen, daſs sich das Integral, wenn die Konstanten desselben sämtlich reell sind, immer vermittelst einer linearen und reellen Substitution

$$x = \frac{p + qt}{1 + t} \tag{3}$$

auf die Form bringen läſst:

$$V = \int \Phi(t, T)\, dt,$$

wobei T eine Wurzel von der Form:

$$T = \sqrt{\pm (t^2 + \lambda)(t^2 + \mu)}$$

ist, λ und μ reelle Konstante und Φ eine rationale Funktion von t und T bezeichnen.

442. Reduktion der Quadratwurzel auf eine einfachere Form, wenn der Radikand vom 4ten Grade ist. Wir nehmen zuerst an, daſs ε nicht null ist. Das Polynom unter der Wurzel kann immer in zwei reelle Faktoren 2ten Grades zerlegt werden, und folglich kann man schreiben:

$$X = \sqrt{(f - 2gx + x^2)(f' - 2g'x + x^2)\,\varepsilon}. \tag{4}$$

Vermittelst der in Gleichung (3) angegebenen Substitution wird

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1 + t)^2},$$

$$f' - 2g'x + x^2 = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1 + t)^2},$$

wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$\begin{aligned} F &= f - 2gp + p^2, & F' &= f' - 2g'p + p^2,\\ G &= -f + g(p + q) - pq, & G' &= -f' + g'(p + q) - pq,\\ H &= f - 2gq + q^2, & H' &= f' - 2g'q + q^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man nun weiter:

$$T = \sqrt{\pm \left(\frac{F}{H} - \frac{2G}{H}t + t^2\right)\left(\frac{F'}{H'} - \frac{2G'}{H'}t + t^2\right)}, \tag{6}$$

so ist:

$$X = \frac{\sqrt{\pm \varepsilon H H'}}{(1+t)^2} T. \tag{7}$$

Das Vorzeichen $\pm$ ist dabei so zu wählen, daſs das Produkt $\varepsilon H H'$ positiv wird. Die Formel (3) liefert aber auch

$$dx = (q-p) \frac{dt}{(1+t)^2}, \tag{8}$$

und demnach wird das Differential dV durch diese Substitution gleich

$$dV = \Phi(t, T)\, dt;$$

Φ bedeutet eine rationale Funktion von t und T.

Nun haben wir aber zwei noch unbestimmte Zahlen p und q eingeführt, über welche wir derart verfügen können, daſs die ungeraden Potenzen von t unter der Wurzel in der Gleichung (6) verschwinden. Dazu genügt es $G = 0$ und $G' = 0$ zu setzen, d. h.

$$\begin{aligned} f - g\,(p+q) + pq &= 0, \\ f' - g'(p+q) + pq &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{f - f'}{g - g'}, \\ pq &= \frac{fg' - f'g}{g - g'}, \end{aligned} \tag{10}$$

ferner:

$$p - q = \frac{\sqrt{(f + f' - 2gg')^2 - 4(f - g^2)(f' - g'^2)}}{g - g'}. \tag{11}$$

Abgesehen von dem Falle $g = g'$, auf welchen wir gleich noch zurückkommen werden, erkennt man, daſs die Gleichung (11) zusammen mit der ersten Gleichung (10) die Koeffizienten p und q der linearen gebrochenen Substitution bestimmt. Nun hat man noch zu beweisen, daſs diese Koeffizienten stets reell gemacht werden können.

Es seien mit a, b, c, d die vier Wurzeln der Gleichung $X^2 = 0$ bezeichnet und es werde $f = ab$, $g = \frac{a+b}{2}$, $f' = cd$, $g' = \frac{c+d}{2}$ gesetzt. Führt man diese Werte von f, f', g, g' in den Ausdruck für $p - q$ ein, so erkennt man, daſs die

Größe unter der Wurzel für $a = c$, oder $a = d$ und ebenso für $b = c$ oder $b = d$ verschwindet. Hieraus folgt, daß

$$p - q = 2\frac{\sqrt{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}}{a+b-c-d}$$

wird. Sind die vier Wurzeln reell, so setze man

$$a > b > c > d.$$

Sind zwei Wurzeln reell und zwei konjugiert komplex, so nehme man für a und b die beiden reellen Wurzeln; dann sind die beiden Faktoren $a - c$ und $a - d$ konjugiert und liefern ein reelles Produkt; ebenso $b - c$ und $b - d$.

Sind die vier Wurzeln komplex, so wähle man a und b als zwei konjugierte, ebenso c und d. Alsdann sind die beiden Faktoren $a - c$ und $b - d$ konjugiert, und ebenso $a - d$ und $b - c$.

Für den Fall $g = g'$ kann man das vorgelegte Problem unmittelbar lösen, wenn man

$$x = g + t$$

setzt. Schließlich bemerken wir noch, daß aus den beiden Gleichungen (7) und (8) durch Division folgt:

$$\frac{dx}{X} = r\,\frac{dt}{T},$$

wobei r eine bestimmte Konstante ist.

443. Entsprechende Reduktion, wenn der Radikand vom 3ten Grade ist. Wir haben noch den Fall $\varepsilon = 0$ zu untersuchen. Das Polynom unter der Wurzel X läßt sich in zwei reelle Faktoren zerlegen, von denen der eine vom ersten, der andere vom zweiten Grade ist. Es ist

$$X = \sqrt{-\delta(a-x)(f - 2gx + x^2)},$$

und durch die Substitution (3) wird:

$$a - x = \frac{a(1+t)-(p+qt)}{1+t} = \frac{(q-a)\left(\frac{a-p}{q-a} - t\right)(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1+t)^2},$$

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1+t)^2};$$

F, G, H haben die in den Gleichungen (5) angegebenen Werte. Die Gleichungen (6) und (7) bestehen also auch in diesem Falle, wenn man $-\delta$ an Stelle von ε schreibt, und die erste Potenz von t verschwindet aus jedem Faktor unter der Wurzel, wenn man $G = 0$ und $G' = 0$ setzt; d. h.

$$\frac{a-p}{q-a} = 1, \qquad -f + g(p+q) - pq = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{p+q}{2} = a, \qquad pq = 2ga - f,$$

und

$$\frac{p-q}{2} = \sqrt{a^2 - 2ga + f} = \sqrt{(a-b)(a-c)},$$

wenn b und c die Wurzeln des Trinomes $x^2 - 2gx + f$ sind. Sind b und c reell, so hat man für a die größte oder die kleinste der drei Wurzeln von $X^2 = 0$ zu wählen. Sind b und c komplex, so ist das Produkt der konjugierten Faktoren $a-b$, $a-c$ positiv.

444. Reduktion des Integranden. Die rationale Funktion $\Phi(t, T)$ kann in der Form

$$\frac{M + Nt}{M' + N't}$$

dargestellt werden, wobei M, N, M', N' ganze Funktionen von t^2 und T sind. Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Quotienten mit $M' - N't$, so erhält er die Form

$$P + Qt,$$

wobei P und Q *rationale Funktionen* von t^2 und T sind. Also ist

$$V = \int P\,dt + \int Qt\,dt.$$

Setzt man nun $t^2 = u$, $2t\,dt = du$, so wird das Glied $\int Qt\,dt$ gleich $\frac{1}{2}\int Q\,du$, wobei Q eine rationale Funktion von u und der Quadratwurzel aus einem Trinome zweiten Grades in u ist. Demnach ist $\int Qt\,dt$ durch algebraische, logarithmische und cyklometrische Funktionen von t und T darstellbar.

Das Integral $\int P\,dt$ ist von der Form

$$\int \frac{M+NT}{M'+N'T}\,dt \quad \text{oder} \quad \int \frac{N+\frac{M}{T}}{N'+\frac{M'}{T}}\,dt,$$

wobei M, N, M', N' ganze Funktionen von t^2 sind.

Multipliziert man Zähler und Nenner des Integranden mit

$$N' - \frac{M'}{T},$$

so wird

$$\int P\,dt = \int \Psi(t^2)\,dt + \int \Phi(t^2)\frac{dt}{T},$$

wobei $\Phi(t^2)$ und $\Psi(t^2)$ rationale Funktionen von t^2 sind. Das Integral $\int \Psi(t^2)\,dt$ ist ein rationales, und folglich durch algebraische, logarithmische und cyklometrische Funktion ausdrückbar. Wenn man also

$$U = \int \Phi(t^2)\frac{dt}{T}$$

setzt, so können wir sagen:

Jedes elliptische Integral ist gleich einer Summe bekannter Funktionen plus einem elliptischen Integrale der besonderen Form:

$$U = \int \Phi(t^2)\frac{dt}{T}.$$

445. Normalform des Radikanden. Das vorgelegte Problem ist also auf die Untersuchung des Integrales

$$U = \int \varphi(t^2)\frac{dt}{T}$$

zurückgeführt, wobei $\varphi(t^2)$ eine rationale Funktion von t^2 bedeutet, und T eine Wurzel, welche eine der fünf Formen haben kann:

$$(1) \qquad T = \sqrt{+(t^2-\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

$$(2) \qquad T = \sqrt{-(t^2-\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

$$(3) \qquad T = \sqrt{+(t^2+\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

$$(4) \qquad T = \sqrt{-(t^2+\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

$$(5) \qquad T = \sqrt{+(t^2+\lambda^2)(t^2+\mu^2)};$$

λ und μ sind reelle Konstante. Den Fall, dafs

$$T = \sqrt{-(t^2 + \lambda^2)(t^2 + \mu^2)}$$

ist, schliefsen wir deshalb aus, weil ihm ein bei allen reellen Werten von t imaginärer Wert von U entspricht; übrigens kommt derselbe durch Absonderung des Faktors $i = \sqrt{-1}$ auf den fünften Fall zurück.

In den fünf Fällen, welche wir zu untersuchen haben, kann die Wurzel auf die nämliche Form gebracht werden durch eine Änderung der Variabelen. Die gemeinsame Form, welche wir wählen, ist keineswegs die einzig mögliche; sie ist jedoch in mancher Hinsicht die geeignetste und die am häufigsten angewandte.

1. Im ersten Falle nehmen wir, was statthaft ist, $\lambda^2 < \mu^2$ an, und setzen

$$\frac{\lambda^2}{\mu^2} = k^2.$$

Damit die Wurzel T reell bleibt, mufs

$$t^2 < \lambda^2 \quad \text{oder} \quad t^2 > \mu^2$$

sein. Wenn $t^2 < \lambda^2$ ist, so setzen wir

$$t = \lambda x, \qquad dt = \lambda\, dx,$$

und es durchläuft dann x das Intervall von 0 bis 1, oder was dasselbe ist, von 0 bis -1. Es wird:

$$T = k\mu^2 \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

also:

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Ist $t^2 > \mu^2$, so setzt man

$$t = \frac{\mu}{x}, \qquad dt = -\frac{\mu\, dx}{x^2},$$

und es durchläuft x bei wachsenden Werten von t die Werte von 1 bis 0; es folgt

$$T = \frac{\mu^2}{x^2} \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}, \quad \int \frac{dt}{T} = -\frac{1}{\mu} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

2. Auch in dem zweiten Falle können wir annehmen, dafs $\lambda^2 < \mu^2$ ist; wir setzen

$$\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} = k^2.$$

Es mufs, damit T reell ist, t^2 zwischen λ^2 und μ^2 bleiben. Die Substitution

$$t^2 = \mu^2 (1 - k^2 x^2)$$

ergiebt:

$$dt = k^2 \mu \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \qquad T = k^2 \mu^2 x \sqrt{1 - x^2},$$

folglich:

$$\int \frac{dt}{T} = -\frac{1}{\mu} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Wenn t^2 die Werte von λ^2 bis μ^2 durchläuft, so geht x^2 von 1 bis 0.

3. Im dritten Falle erfordert die Realität von T, dafs $t^2 > \mu^2$ ist. Wir setzen

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2$$

und führen die Substitution ein

$$t^2 = \frac{\mu^2}{1 - x^2}, \quad dt = \frac{\mu x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \frac{\lambda\mu}{k} \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{1-x^2},$$

aus welcher folgt:

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Wiederum gehören, während t^2 das Intervall von μ^2 bis unendlich durchläuft, zu x^2 die Werte von 0 bis 1.

4. Im vierten Falle mufs $t^2 < \mu^2$ sein. Wir setzen

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2,$$

ferner:

$$t^2 = \mu^2 (1 - x^2), \qquad dt = -\mu \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad T = \frac{\mu^2}{k} x \sqrt{1 - k^2x^2},$$

$$\int \frac{dt}{T} = -\frac{k}{\mu} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

x^2 durchläuft, während t^2 von 0 bis μ^2 wächst, das Intervall von 1 bis 0.

5. Im fünften Falle ist die Wurzel T bei allen reellen Werten von t reell; wir nehmen $\lambda^2 < \mu^2$ an und setzen:

$$\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2} = k^2.$$

Ferner wenden wir die Substitution an:

$$t^2 = \lambda^2 \frac{x^2}{1-x^2}, \quad dt = \frac{\lambda\, dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \lambda\mu \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{1-x^2}$$

und erhalten:

$$\int \frac{dt}{T} = \frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

x^2 durchläuft das Intervall von 0 bis 1.

Wir können das bisher Gewonnene in den Satz zusammenfassen:

Durch eine Substitution der Form:

$$t^2 = \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2},$$

in der α, β, γ, δ reelle Konstante bedeuten, kann man immer $\int \frac{dt}{T}$ auf die Normalform bringen:

$$\int \frac{dt}{T} = C \cdot \int \frac{dx}{X},$$

in welcher C eine Konstante bedeutet und

$$X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

zu setzen ist. Dabei ist k^2 eine positive Zahl zwischen 0 und 1, die der Modul des elliptischen Integrales $\int \frac{dx}{X}$ genannt wird.

Verbinden wir dieses Resultat mit dem in Nr. 444 erhaltenen Ergebnisse, so erkennen wir:

Vermöge einer Substitution der Form:

$$t^2 = \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2}$$

reduziert sich jedes elliptische Integral auf eine Summe bekannter Funktionen plus einem Integrale:

$$\int f(x^2) \frac{dx}{X},$$

in dem X die oben angegebene Bedeutung hat.

446. Die Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Die Funktion $f(x^2)$ kann zerlegt werden in eine ganze Funktion und in Partialbrüche, deren Zähler konstant und deren Nenner gleich einer ganzen Potenz eines Binomes ist, welches durch Addition von x^2 und einer Konstanten entsteht. Ist diese

Konstante null, so reduziert sich der entsprechende Partialbruch auf das Produkt einer Konstanten mit einer ganzen und negativen Potenz von x^2. Mithin ist jedes Glied der Funktion $f(x^2)$ entweder von der Form $x^{2\mu}$, oder von der Form $\frac{1}{(1+nx^2)^\nu}$, wenn man von dem Koeffizienten absieht, und mit n eine Konstante, mit μ und ν ganze Zahlen bezeichnet, von denen die erste auch null oder negativ sein kann. Setzt man also

$$(1) \qquad Y_\mu = \int \frac{x^{2\mu}\,dx}{X}, \qquad Z_\nu = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X},$$

so ist das Integral U eine Summe von Gliedern, die sich aus Y_μ und Z_ν, multipliziert mit Konstanten, zusammensetzt. Es sind also diese Funktionen zu untersuchen.

Wir betrachten zuerst die Integrale Y_μ. Es ist

$$X^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2),$$

also:

$$\frac{X\,dX}{dx} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{x^{2\mu-3}\,dx}{X}$ und bildet man auf jeder Seite das Integral, so folgt:

$$2k^2 Y_\mu - (1+k^2) Y_{\mu-1} = \int x^{2\mu-3} \frac{dX}{dx}\,dx.$$

Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int x^{2\mu-3} \frac{dX}{dx}\,dx = x^{2\mu-3} X - (2\mu-3) \int X x^{2\mu-4}\,dx.$$

Andererseits ist

$$\int X x^{2\mu-4}\,dx = \int \frac{X^2 x^{2\mu-4}\,dx}{X} = \int \frac{x^{2\mu-4} - (1+k^2)x^{2\mu-2} + k^2 x^{2\mu}}{X}\,dx$$
$$= Y_{\mu-2} - (1+k^2) Y_{\mu-1} + k^2 Y_\mu.$$

Demnach erhält man:

$$(2) \begin{cases} 2k^2 Y_\mu - (1+k^2) Y_{\mu-1} = x^{2\mu-3} X - (2\mu-3)(Y_{\mu-2} - [1+k^2] Y_{\mu-1} + k^2 Y_\mu) \\ \text{oder:} \\ (2\mu-1) k^2 Y_\mu - (2\mu-2)(1+k^2) Y_{\mu-1} + (2\mu-3) Y_{\mu-2} = x^{2\mu-3} X. \end{cases}$$

Eine Konstante fügen wir auf der rechten Seite nicht hinzu, weil jedes der Integrale Y_μ eine willkürliche Konstante enthält.

Auch ist zu bemerken, dafs sich die Gleichung (2) noch kürzer ableiten läfst, indem man das Differential von $x^{2\mu-3}X$ bildet, und dann dasselbe integriert; es ist indessen der Weg, welchen wir eingeschlagen haben, ein mehr analytischer.

Setzt man nun in der Gleichung $\mu = 2, 3, 4 \ldots$, so kann man nach einander

$$Y_2,\ Y_3,\ Y_4 \ldots$$

als Funktion von Y_0, Y_1 und von algebraischen Funktionen bestimmen.

Setzt man $\mu = 1$, so erhält man Y_{-1} als Funktion von Y_0 und Y_1 und von algebraischen Gröfsen; setzt man endlich $\mu = 0, -1, -2, -3 \ldots$, so liefert die nämliche Gleichung die Werte von

$$Y_{-2},\ Y_{-3},\ Y_{-4} \ldots$$

als Funktionen von Y_0 und Y_1, und von algebraischen Funktionen. Demnach führt die Untersuchung der Integrale Y_μ nur auf die neuen elementaren Funktionen Y_0 und Y_1, von denen Y_0 das Normalintegral erster Gattung, Y_1 das Normalintegral zweiter Gattung heifst.

447. Entwickelung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung nach Potenzen des Moduls. Mit Hilfe des Satzes der Nr. 426 können wir die elliptischen Integrale nach Potenzen des Moduls k^2 entwickeln. Wir betrachten zuerst das Normalintegral erster Gattung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Nach der Binomialformel ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6x^6 + \cdots$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäfsig (Nr. 364), so lange $|kx| < 1$ ist. Multipliziert man dieselbe mit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und integriert alsdann von $x = 0$ an, so ergiebt sich die nach Nr. 426 ebenfalls für $|kx| < 1$ gleichmäfsig konvergente Reihe:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Ebenso wird für das elliptische Normalintegral zweiter Gattung

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Jedes der Integrale, welches in diesen beiden Gleichungen vorkommt, kann nach den Methoden der Nr. 435 ff. bestimmt werden. Übrigens findet man leicht direkt durch teilweise Integration die Formel:

$$\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int_0^x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $m = 2, 4, 6, \ldots$, so findet man die Werte der Koeffizienten unserer Reihen alle ausgedrückt durch das Integral $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, welches den Wert $\arcsin x$ hat. Die in den Gleichungen enthaltenen Reihen sind sehr rasch konvergente, wenn k ein kleiner Bruch ist. Wenn aber k nur wenig von 1 unterschieden ist, so ist es notwendig, andere Entwickelungen anzuwenden.

448. Das Normalintegral dritter Gattung. Wir bestimmen nun die Funktion Z_ν. Der Index ν ist hierbei eine ganze positive Zahl. Es ist indessen zu bemerken, daſs, wenn man demselben negative Werte beilegt, die entsprechenden Funktionen Z_ν Summen von Funktionen Y_μ sind; demnach lassen diese sich durch die Funktionen Y_0, Y_1 und durch algebraische Funktionen darstellen. Es ist

$$Z_{-\nu} = \int \frac{(1+nx^2)^\nu}{X}\,dx = Y_0 + \nu n Y_1 + \cdots + n^\nu Y_\nu + C.$$

Um nun für Z_ν eine ähnliche Reduktionsformel, wie vorhin zu gewinnen, kann man die teilweise Integration anwenden; rascher jedoch kommt man folgendermaſsen zum Ziele. Wir differentiieren die Funktion

$$\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}$$

und erhalten:

$$d\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]=\left[\frac{(2\nu-2)X^2}{(1+nx^2)^\nu}-\frac{(2\nu-3)X^2-\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx}}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]\frac{dx}{X}.$$

Ordnet man nun die Polynome X^2 und $\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx}$ nach Potenzen von $(1+nx^2)$, so findet man:

$$X^2=\frac{(n+1)(n+k^2)}{n^2}-\frac{n+(n+2)k^2}{n^2}(1+nx^2)+\frac{k^2}{n^2}(1+nx^2)^2,$$

$$\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx}=\frac{n+(n+2)k^2}{n^2}-\frac{n+(n+4)k^2}{n^2}(1+nx^2)+\frac{2k^2}{n^2}(1+nx^2)^2,$$

und setzt man:

$$(3)\qquad\begin{cases}A=(2\nu-2)\dfrac{(n+1)(n+k^2)}{n^2},\\ B=(2\nu-3)\dfrac{n(n+2)+(2n+3)k^2}{n^2}\\ C=(2\nu-4)\dfrac{n+(n+3)k^2}{n^2},\\ D=(2\nu-5)\dfrac{k^2}{n^2},\end{cases}$$

so erhält man nach den vorigen Formeln:

$$d\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]=AdZ_\nu-BdZ_{\nu-1}+CdZ_{\nu-2}-DdZ_{\nu-3},$$

also durch Integration:

$$(4)\qquad AZ_\nu-BZ_{\nu-1}+CZ_{\nu-2}-DZ_{\nu-3}=\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}$$

Der Koeffizient A ist null in den beiden Fällen $n=-1$ und $n=-k^2$; alsdann wird

$$B=-(2\nu-3)(1-k^2)\quad\text{bezw.}\quad B=+(2\nu-3)\frac{1-k^2}{k^2}.$$

B ist also nicht null, weil k^2 kleiner als 1 ist. Die Gleichung (4) reduziert sich also bei diesen Werten von n auf die Form:

$$(5)\qquad -BZ_{\nu-1}+CZ_{\nu-2}-DZ_{\nu-3}=\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}},$$

und giebt man dem Exponenten ν die Werte $2, 3, 4\ldots$, so bestimmt diese Gleichung nach einander die Werte von

$$Z_1,\ Z_2,\ Z_3\ldots$$

durch algebraische Funktionen und der Integrale Z_0 und Z_{-1}, oder auch der Integrale Y_0 und Y_1, weil

$$Z_0 = Y_0, \quad Z_{-1} = Y_0 + n Y_1$$

ist. Also führt in allen Fällen, wo $1 + nx^2$ gleich einem der beiden Faktoren von X^2 ist, die Untersuchung der Funktion Z_ν zu keiner neuen analytischen Funktion.

Nimmt man aber an, daſs n weder gleich -1 noch auch gleich $-k^2$ ist, so ist A nicht null, auſser für $\nu = 1$. Giebt man dem Exponenten ν die Werte $2, 3, 4 \ldots$, so bestimmt die Gleichung (4) nach einander

$$Z_2, \; Z_3, \; Z_4 \ldots$$

als Funktionen von Z_1, Z_0, Z_{-1} und von algebraischen Ausdrücken. Die Integrale Z_0 und Z_{-1} lassen sich aber, wie wir sahen, durch Y_0 und Y_1 darstellen. Mithin führt die Untersuchung der Funktionen Z_ν nur auf das eine neue Element Z_1, welches das *Normalintegral dritter Gattung* genannt wird.

Als Resultat unserer Betrachtungen ergiebt sich also, daſs das Integral des vorgelegten Differentiales sich vermittelst der bereits bekannteu elementaren Funktionen und der Integrale darstellen läſst, welche zu den drei Arten gehören:

$$Y_0, \; Y_1, \; Z_1.$$

Diese drei Integrale Y_0, Y_1, Z_1 bilden in der That drei neue analytische Elemente, welche im allgemeinen Falle nicht auf einander und nicht auf die früheren elementaren Funktionen reduzibel sind, wie sich aus weiter gehenden Untersuchungen der Eigenschaften dieser Funktionen ergiebt, worauf hier nicht eingegangen werden kann.

449. Zusammenstellung der erhaltenen Resultate. Die drei mit Y_0, Y_1, Z_1 bezeichneten Normalintegrale sollen derart bestimmt werden, daſs sie zugleich mit x verschwinden; nennen wir sie alsdann u, v, w und ist x eine Variabele zwischen 0 und 1, so wird

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Die Funktionen der ersten und zweiten Gattung enthalten eine Konstante k, kleiner als eins, welche, wie bereits erwähnt, der *Modul* genannt wird. Die Funktion der dritten Gattung enthält aufser dem Modul k noch eine andere Konstante n, welche der *Parameter* heifst. Wir haben gesehen, dafs, wenn der Parameter n entweder gleich -1, oder gleich $-k^2$ ist, die Funktion dritter Gattung durch die beiden ersten Funktionen und durch algebraische Gröfsen darstellbar ist. Es wird für den Fall $n = -1$ nach der Gleichung (5) in Nr. 448:

$$(1-k^2)\,w + k^2(u-v) = \frac{x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-x^2},$$

und für den Fall $n = -k^2$

$$(1-k^2)\,w - (u-k^2v) = \frac{-k^2x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2},$$

wie man sich leicht auch durch Differentiation überzeugen kann.

450. Grenzfall, dafs der Modul verschwindet. Die elliptischen Integrale reduzieren sich auf cyklometrische oder logarithmische und algebraische Funktionen in den Grenzfällen, wo der Modul gleich null oder gleich eins wird. Für den Fall $k = 0$ ist

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Die erste Gleichung ergiebt $u = \arcsin x$. In den Funktionen v und w kann man die Differentiale auf eine rationale Form bringen nach der Methode der Nr. 435 ff. Man kann indessen auch in folgender Weise vorgehen. Die teilweise Integration giebt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

und bildet man die Integrale derart, daſs sie für $x = 0$ verschwinden, so wird

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich $u - v$; also ist

$$v = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x.$$

Das Differential dw wird rational durch die Substitution

$$t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es ist dann:

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und folglich:

$$dw = \frac{dt}{1+(1+n)t^2} = \frac{d\,\mathrm{arc\,tang}\left(t\sqrt{1+n}\right)}{\sqrt{1+n}},$$

also:

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+n}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Der Parameter n ist als reell vorausgesetzt. Für den Fall, daſs $1+n$ negativ ist, kann man die Formel von dem imaginären Werte befreien, indem man an Stelle des Kreisbogens Logarithmen einführt. Man kann alsdann schreiben:

$$dw = \frac{dt}{1+(1+n)t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{1+t\sqrt{-1-n}} + \frac{dt}{1-t\sqrt{-1-n}}\right),$$

also:

$$w = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\,l\,\frac{1+t\sqrt{-1-n}}{1-t\sqrt{-1-n}} = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\,l\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1-n}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-1-n}}\right).$$

Die vorstehenden Ausdrücke für w werden illusorisch, wenn $n = -1$ ist. In diesem Falle verschwinden Zähler und Nenner des Bruches

$$w = \frac{\mathrm{arc\,tang}\,t\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}},$$

und man erhält

$$w = t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

451. Grenzfall, dafs der Modul gleich 1 ist. Für den Fall $k^2 = 1$ wird:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2}, \quad v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{1 - x^2}, \quad w = \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2)(1 - x^2)}.$$

Die Differentiale der Funktionen u, v, w sind also jetzt rational. Wendet man die Regel der Nr. 430 an, so findet man

$$u = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1 + x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1 - x} = l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

Ferner ist $du - dv = dx$, also

$$v = l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - x.$$

Endlich ist

$$\frac{1}{(1 + nx^2)(1 - x^2)} = \frac{1}{1 + n}\left(\frac{n}{1 + nx^2} + \frac{1}{1 - x^2}\right),$$

und folglich:

$$w = \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{n\,dx}{1 + nx^2} + \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{n\,dx}{1 + nx^2} + \frac{u}{1 + n}.$$

Ist n positiv, so wird, indem man $x\sqrt{n} = t$ setzt:

$$\int_0^x \frac{n\,dx}{1 + nx^2} = \sqrt{n}\int_0^t \frac{dt}{1 + t^2} = \sqrt{n}\,\mathrm{arc\,tang}\,t,$$

also:

$$w = \frac{1}{1+n}\,l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + \frac{\sqrt{n}}{1 + n}\,\mathrm{arc\,tang}\,(x\sqrt{n}).$$

Ist aber n negativ, so setzt man $x\sqrt{-n} = t$ und erhält:

$$\int_0^x \frac{n\,dx}{1 + nx^2} = -\sqrt{-n}\int_0^t \frac{dt}{1 - t^2} = -\sqrt{-n}\,l\sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}},$$

also:

$$w = \frac{1}{1+n}\,l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - \frac{\sqrt{-n}}{1 + n}\,l\sqrt{\frac{1 + x\sqrt{-n}}{1 - x\sqrt{-n}}}.$$

Um den Wert von w für den Fall $n = -1$ zu erhalten, kann man den Grenzwert dieses Ausdruckes, welcher die Form $\infty - \infty$ erhält, bestimmen, oder direkt

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1 - x^2)^2}$$

berechnen. Es wird

$$w = \frac{1}{4} l \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2} \frac{x}{1 - x^2}.$$

452. Die elliptischen Funktionen. Die drei elliptischen Integrale u, v, w erhalten eine besonders einfache Form, wenn man den Winkel einführt, dessen Sinus die unabhängige Variabele x ist. Setzt man

$$x = \sin\varphi, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos\varphi,$$

und bezeichnet man ferner $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ mit $\Delta\varphi$, so wird:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad v = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad w = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Betrachten wir insbesondere das Integral der ersten Gattung. Durchläuft φ das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so durchläuft u durchaus wachsend das Intervall von 0 bis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K$. Der Winkel φ wird die *Amplitude* von u genannt und

$$\varphi = \operatorname{am} u$$

geschrieben. Es ist folglich:

$$x = \sin\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1 - k^2x^2} = \Delta\operatorname{am} u.$$

Bisher ist die Variabele u als Funktion von x betrachtet worden. Wenn man nun aber u als unabhängige Variabele ansieht, zunächst beschränkt auf das Intervall von 0 bis K, so werden x, $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{1 - k^2x^2}$, oder was dasselbe besagt, $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ Funktionen von u. Diese Funktionen, auf welche wir später noch zurückkommen werden, heifsen jetzt die *elliptischen Funktionen*. Sie stehen zu den Integralen, aus welchen sie abgeleitet sind, in derselben Beziehung wie die goniometrischen Funktionen $\sin u$, $\cos u$ zu den inversen Funktionen $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$.

Nimmt man u zur unabhängigen Variabelen, so erhalten die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Gattung, weil $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = du$ ist, die Form

$$v = \int_0^u \sin^2 \operatorname{am} u \, du, \quad w = \int_0^u \frac{du}{1 + n \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

§ 4. Integration bekannter Transcendenten.

453. Einige einfache Fälle, in denen der Integrand algebraisch gemacht werden kann. Wenn ein transcendentes Differential, dessen Integral zu bestimmen ist, durch eine Substitution auf eine algebraische Form gebracht werden kann, so ist es im Allgemeinen zweckmäſsig, diese Reduktion auszuführen. Wenn also f eine algebraische Funktion bezeichnet, so werden die Integrale:

$$\int f(e^{mx}) e^{mx} dx, \qquad \int f(lx) \frac{dx}{x},$$

$$\int f(\sin x) \cos x \, dx, \qquad \int f(\cos x) \sin x \, dx, \qquad \int f(\operatorname{tang} x) \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$\int f(\operatorname{arc} \sin x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int f(\operatorname{arc} \operatorname{tang} x) \frac{dx}{1 + x^2}, \quad \ldots\ldots$$

auf Integrale algebraischer Differentiale gebracht, indem man setzt:

$$t = e^{mx}, \quad lx, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{arc} \sin x, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, \ldots$$

454. Ein allgemeiner Satz. Es sei z eine transcendente Funktion der Variabelen x, und X irgend eine Funktion derselben Variabelen. Bedeutet nun n eine positive ganze Zahl und kann man die Reihe von Funktionen bestimmen:

$$X_1, \; X_2, \ldots X_{n+1},$$

deren Ableitungen bezüglich gleich sind

$$X, \; X_1 \frac{dz}{dx}, \ldots X_n \frac{dz}{dx},$$

so kann man auch das Integral

$$\int X z^n dx$$

ausführen. Denn die teilweise Integration ergiebt die Gleichungen:

$$\int X z^n dx = \int z^n \frac{dX_1}{dx} dx = X_1 z^n - n \int X_1 z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int X_1 z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = \int z^{n-1} \frac{dX_2}{dx} dx = X_2 z^{n-1} - (n-1) \int X_2 z^{n-2} \frac{dz}{dx} dx,$$

. . . .

$$\int X_{i-1} z^{n-i+1} \frac{dz}{dx} dx = \int z^{n-i+1} \frac{dX_i}{dx} dx = X_i z^{n-i+1} - (n-i+1) \int X_i z^{n-i} \frac{dz}{dx} dx,$$

und hieraus folgt:

$$(1) \begin{cases} \int X z^n dx = X_1 z^n - n X_2 z^{n-1} + n(n-1) X_3 z^{n-2} \dots \\ \qquad + (-1)^{i-1} n(n-1) \cdots (n-i+2) X_i z^{n-i+1} \\ \qquad + (-1)^i n(n-1) \cdots (n-i+1) \int X_i z^{n-i} \frac{dz}{dx} dx. \end{cases}$$

Ist n eine ganze positive Zahl, wie angenommen wurde, so mache man schliefslich $i = n$, und es folgt:

$$(2) \begin{cases} \int X z^n dx = X_1 z^n - n X_2 z^{n-1} + n(n-1) X_3 z^{n-2} + \cdots \\ \qquad + (-1)^n n(n-1) \cdots 1 X_{n+1} + C, \end{cases}$$

womit der Satz bewiesen ist.

455. Beispiele. 1. Wir betrachten das Integral:

$$\int x^{m-1} (lx)^n dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl bedeutet. Hier ist

$$z = lx, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \quad X = x^{m-1},$$

und es wird

$$X_1 = \frac{x^m}{m}, \quad X_2 = \frac{x^m}{m^2}, \quad X_3 = \frac{x^m}{m^3} \cdots,$$

also:

$$(3) \begin{cases} \int x^{m-1} (lx)^n dx \\ = \frac{x^m}{m} \left[(lx)^n - \frac{n}{m} (lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} (lx)^{n-2} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{m^n} \right] + C. \end{cases}$$

Schreibt man e^x, x, $e^x dx$ an Stelle von x, lx, dx, so ergiebt diese Gleichung:

$$(4) \begin{cases} \int e^{mx} x^n dx \\ = \frac{e^{mx}}{m} \left[x^n - \frac{n}{m} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{m^n} \right] + C. \end{cases}$$

Dieses Resultat unterscheidet sich nur der Form nach von dem in Nr. 417 gewonnenen.

2. In dem Integrale:

$$\int (\arcsin x)^n \, dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist, wird

$$z = \arcsin x, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad X = 1,$$

und man kann demnach setzen:

$$X_1 = x, \quad X_2 = -\sqrt{1-x^2}, \quad X_3 = -x, \quad X_4 = \sqrt{1-x^2}, \ldots,$$

wonach dieselben Werte periodisch wiederkehren. Es ist also

$$(5) \begin{cases} \int (\arcsin x)^n dx = x[(\arcsin x)^n - n(n-1)(\arcsin x)^{n-2} + - \cdots] \\ \quad + \sqrt{1-x^2}\,[n(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\arcsin x)^{n-3} + - \cdots] + C. \end{cases}$$

Schreibt man hier x, $\sin x$, $\cos x$, an Stelle von $\arcsin x$, x, $\sqrt{1-x^2}$, so folgt

$$(6) \begin{cases} \int x^n \cos x \, dx = \sin x\,[x^n - n(n-1)x^{n-2} + - \cdots] \\ \quad + \cos x\,[nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + - \cdots] + C. \end{cases}$$

456. Auswertung von Integralen mit Hilfe der Gleichung $e^{xi} = \cos x + i \sin x$. Wir kehren zu der Gleichung (4) zurück. Die Differentiale der beiden Seiten in dieser Gleichung sind einander identisch gleich, was auch der Wert der Konstanten m sein mag, und diese Identität wird nicht gestört, auch wenn man diese Konstante als komplex annimmt. Setzt man also $m = a + ib$, so folgt:

$$\int x^n e^{(a+ib)x} dx$$

$$= \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\left[x^n - \frac{nx^{n-1}}{a+ib} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(a+ib)^2} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{(a+ib)^n}\right] + C.$$

Wird nun $e^{(a+ib)x}$ durch seinen Wert

$$e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

ersetzt, und werden alsdann die reellen und die imaginären Bestandteile auf beiden Seiten einander gleichgesetzt, so erhält man die Werte der beiden Integrale

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx \quad \text{und} \quad \int x^n e^{ax} \sin bx\,dx$$

für den Fall, dafs n eine ganze positive Zahl ist. Setzt man

$$a + ib = \varrho (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

so erhält man:

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx = e^{ax}\Big[\frac{1}{\varrho} x^n \cos(bx - \alpha) - \frac{n}{\varrho^2} x^{n-1} \cos(bx - 2\alpha) \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{n!}{\varrho^{n+1}} \sin(bx - \overline{n+1}\,\alpha)\Big] + C.$$

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\,dx = e^{ax}\Big[\frac{1}{\varrho} x^n \sin(bx - \alpha) - \frac{n}{\varrho^2} x^{n-1} \sin(bx - 2\alpha) \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{n!}{\varrho^{n+1}} \sin(bx - \overline{n+1}\,\alpha)\Big] + C.$$

Der Fall $n = 0$ ist wichtig zu bemerken; es ist

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{1}{\varrho} e^{ax} \cos(bx - \alpha) + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{1}{\varrho} e^{ax} \sin(bx - \alpha) + C,$$

oder:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Diese beiden Formeln erhält man auch direkt, wenn man die beiden Differentiale $e^{ax} \cos bx\,dx$ und $e^{ax} \sin bx\,dx$ teilweise integriert. Denn auf diese Weise gewinnt man zwei Gleichungen zwischen diesen Integralen, aus denen man die gewonnenen Ausdrücke herleiten kann.

457. Von der Reduktion der Integrale durch teilweise Integration. Die Methode der Nr. 454 und allgemeiner noch das Verfahren der teilweisen Integration lassen oftmals auch solche Integrale, deren Werte nicht durch algebraische, logarithmische Funktionen etc. ausdrückbar sind, auf einfachere zurückführen.

Betrachten wir z. B. das Integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n} dx,$$

in welchem n eine ganze positive Zahl ist. Da $\frac{dx}{x^n}$ das

Differential von $-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ ist, so ergiebt die teilweise Integration:

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n}\,dx = -\frac{e^{-x}}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{-x}}{x^{n-1}}\,dx,$$

und vermittelst dieser Gleichung reduziert sich das gegebene Integral auf

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Dieses Integral ist eine neue Transcendente und heifst, zwischen den Grenzen x und ∞ genommen, nach *Bessel*, der *Integrallogarithmus* von e^{-x}. Es wird bezeichnet durch $li\,(e^{-x})$.

458. Der Integrand ist ein Produkt der Sinus und Kosinus linearer Funktionen von x. Integrale dieser Form treten bei vielen Problemen auf, und es ist leicht, sie auszuwerten. Es sei zunächst

$$P = \cos\,(ax + b)\cos\,(a'x + b')$$

der Integrand, alsdann setze man:

$$P = \frac{1}{2}\cos\,[(a+a')\,x + (b+b')] + \frac{1}{2}\cos\,[(a-a')\,x + (b-b')].$$

Sind also $a+a'$ und $a-a'$ von null verschieden, so wird

$$\int P\,dx = \frac{\sin\,[(a+a')\,x + (b+b')]}{2\,(a+a')} + \frac{\sin\,[(a-a')\,x + (b-b')]}{2\,(a-a')} + C,$$

und ist $a = a'$, so wird

$$\int P\,dx = \frac{\sin\,(2\,ax + [b+b'])}{4a} + \frac{x\cos\,(b-b')}{2} + C.$$

In derselben Weise kann man vorgehen, wenn P ein Produkt von n solchen Faktoren ist:

$$P = \cos\,(ax + b)\cos\,(a'x + b')\cos\,(a''x + b'')\ldots$$

Setzt man

$$\alpha = a \pm a' \pm a'' \pm \cdots, \quad \beta = b \pm b' \pm b'' \pm \cdots,$$

so ist P die Summe von 2^{n-1} Gliedern, welche durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos\,(\alpha x + \beta)$$

dargestellt werden. Es ist also

$$\int P\,dx = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C.$$

Das Glied $\frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha}$ mufs durch $x \cos\beta$ ersetzt werden, wenn α gleich null ist.

Wir haben alle Faktoren von P durch den Kosinus dargestellt, weil ein Faktor von der Form $\sin(ax+b)$ durch $\cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$ ersetzt werden kann.

459. Anwendung auf $\int \cos^n x\,dx$. Wir betrachten z. B. das Integral

$$\int \cos^n x\,dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist. Es wird, wenn n gerade ist:

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \cdots + \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}},$$

und wenn n ungerade ist:

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n-1}{2}+2\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}\cos x.$$

Also ist für ein gerades n:

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}\,\frac{x}{2} + C,$$

und für ein ungerades n:

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n-1}{2}+2\right)}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}\sin x + C.$$

Verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} - x$, so erhält man den Wert von $\int \sin^n x\, dx$; im Folgenden wird man neue Formeln für die nämlichen Integrale finden.

460. Anwendung auf $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Der Integrand, welcher hier untersucht werden soll, läfst sich algebraisch machen, denn setzt man

$$\sin x = t^{\frac{1}{2}}, \quad \cos x = (1-t)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

so wird er gleich

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Aus dieser Umformung schliefsen wir zunächst, dafs unser Integral ausführbar ist, sobald eine der Zahlen

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

eine ganze Zahl ist (im Besonderen also auch jedesmal, wenn m und n ganze Zahlen sind). Es genügt dann bezw.

$$\sqrt{1-t}, \quad \sqrt{t}, \quad \sqrt{\frac{t}{1-t}}$$

als neue Veränderliche einzuführen um den Integranden rational zu machen. In jedem Falle kann man durch teilweise Integration das Integral (1) vereinfachen.

Man kann aber auch direkt die teilweise Integration auf das Integral $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ anwenden und da sich Ausdrücke dieser Art häufig darbieten, so wird es nicht überflüssig sein, diese Rechnung zu entwickeln.

Das Differential kann in der Form

$$\cos^{n-1} x \cdot \sin^m x \cos x\, dx$$

dargestellt werden; der zweite Faktor ist das Differential von $\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, also ergiebt die teilweise Integration

$$(1) \quad \begin{cases} \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} \\ \qquad\qquad + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx. \end{cases}$$

Führt man in dem Integrale auf der rechten Seite an Stelle des Faktors $\sin^2 x$ den Faktor $1 - \cos^2 x$ ein, so wird dasselbe gleich der Differenz

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

Bringt man das zweite Integral auf die linke Seite und multipliziert man dann beide Seiten mit $\frac{m+1}{m+n}$, so folgt:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx = {} & \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} \\ & + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx. \end{aligned} \right.$$

Verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} - x$, dx in $-dx$, und vertauscht man zugleich die Buchstaben m und n, so folgt nach Multiplikation mit -1:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx = {} & -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} \\ & + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx. \end{aligned} \right.$$

Ersetzt man endlich in der Gleichung (2) n durch $n+2$ und in der Gleichung (3) m durch $m+2$, und löst man alsdann jede Gleichung nach dem Integrale auf, welches auf der rechten Seite vorkommt, so erhält man die beiden neuen Formeln:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx = {} & -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} \\ & + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x \, dx, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \, dx = {} & \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} \\ & + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx. \end{aligned} \right.$$

Von den Gleichungen (4) und (5) wird die erste illusorisch, wenn $n = -1$ ist, die zweite, wenn $m = -1$ ist. In jedem dieser Fälle ist aber die Bedingung der Integrabilität erfüllt. Ebenso werden die Gleichungen (2) und (3) illusorisch, wenn $m + n = 0$ ist, was aber gleichfalls ein Fall der Integrabilität ist.

Im letzten Falle liefert aber noch die Gleichung (1) eine Reduktion, denn sie ergiebt für $n = -m$:

$$(6)\qquad \int \operatorname{tang}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x\, dx,$$

oder, wenn man $m-2$ an Stelle von m schreibt:

$$(7)\qquad \int \operatorname{tang}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\, dx.$$

Lassen wir nun die Fälle der Integrabilität bei Seite, die sich schliefslich immer, wenn es notwendig sein sollte, auf ein rationales Differential bringen lassen, so sieht man, dafs die Gleichungen (2) und (4) den Exponenten n immer um eine gerade Zahl verkleinern oder vergröfsern lassen. Ebenso kann man vermittelst der Gleichungen (3) und (5) den Exponenten m um eine gerade Zahl verkleinern oder vergröfsern. Also ist es immer möglich, diese Exponenten schliefslich auf Zahlen zu bringen, die zwischen -1 und $+1$, oder zwischen 0 und 2 liegen.

In dem besonderen Falle, dafs die Exponenten m und n ganze Zahlen sind, kann man die Reduktion eines jeden solange fortsetzen, als derselbe nicht gleich -1 oder gleich und entgegengesetzt dem andern ist. In dem letzten Falle geht man zu den Gleichungen (6) und (7) über, mittelst deren man die Reduktion ausführt, bis die beiden Exponenten null oder $+1$ und -1 werden. Wir bemerken noch, dafs die beiden Gleichungen (6) und (7) auch unmittelbar erhalten werden aus der Gleichung:

$$\int \operatorname{tang}^m x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} + C.$$

461. Auswertung von $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ für ganzzahlige m und n. Als allgemeines Ergebnis erkennt man, dafs das Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

bei welchem m und n ganze positive oder negative Zahlen sind, vermittelst der obigen Reduktionsformeln immer auf eines der folgenden zurückkommt:

$$\int dx,\quad \int \sin x\, dx,\quad \int \cos x\, dx,\quad \int \sin x \cos x\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x},\quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x},\quad \int \operatorname{tang} x\, dx,\quad \int \operatorname{cotg} x\, dx.$$

Die drei ersten haben die Werte:

$$x + C, \quad -\cos x + C, \quad \sin x + C;$$

wobei C eine Konstante ist. Das vierte ist gleich:

$$\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C;$$

C bedeutet immer eine willkürliche Konstante.

Ferner erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}x},$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + C,$$

was mit der Gleichung in Nr. 52 übereinstimmt. Verändert man in dieser Formel x in $x + \frac{\pi}{2}$, sodann in $2x$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \log\operatorname{tang} x + C.$$

Endlich erhält man

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\log\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log\sin x + C.$$

462. Der Fall $n = 0$. Ist die Zahl n gleich null, so ergiebt die Gleichung (3) der Nr. 460 für den Fall, daſs m eine gerade und positive Zahl ist:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x}{m}\Big[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5}x + \cdots$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\cdots 3}{(m-2)(m-4)\cdots 2}\sin x\Big]$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\cdots 5\cdot 3}{(m-2)(m-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{x}{m} + C,$$

und für den Fall, daſs m ungerade und positiv ist:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x + \cdots \frac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{(m-2)(m-4)\cdots 1}\right] + C.$$

Verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} + x$, so erhält man zwei andere Gleichungen, welche den Wert von

$$\int \cos^m x\,dx$$

für den Fall eines positiven geraden oder ungeraden m darstellen. Diese Formeln lassen sich auch aus den Gleichungen der Nr. 455 ableiten, wenn man dort x durch $\sin x$ oder $\cos x$ ersetzt.

463. Berechnung von $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$. Das Integral

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

läfst sich auf eines der früheren zurückführen, indem man

$$a = r \sin \alpha, \quad b = r \cos \alpha$$

setzt; denn es wird dann gleich

$$\frac{1}{r}\int \frac{dx}{\cos(x-\alpha)}.$$

Auch das allgemeinere Integral

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

kann bestimmt werden, indem man

$$a = r \sin \alpha, \quad b = r \cos \alpha, \quad \frac{c-r}{c+r} = \pm k^2$$

setzt; es wird dann

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c-r}\int \frac{\dfrac{k\,dx}{2\cos^2 \frac{1}{2}(x-\alpha)}}{1 \pm k^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(x-\alpha)},$$

oder wenn man $k \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-\alpha) = t$ setzt:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c-r}\int \frac{dt}{1 \pm t^2}.$$

Das Integral der rechten Seite hat den Wert $\operatorname{arc\,tang} t$ oder $\log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, je nachdem $\pm t^2$ positiv oder negativ ist.

§ 5. Systematische Übersicht über die bisher erhaltenen Resultate.

464. Die Integrale rationaler Funktionen. Überblicken wir die in diesem Paragraphen erhaltenen Resultate, so können wir sagen:

Wir haben untersucht, inwieweit die Integrale bekannter Funktionen entweder wieder auf bekannte Funktionen führen oder inwieweit sie sich auf möglichst einfache Typen zurückführen lassen, wenn sie uns neue Transcendenten definieren.

Wir betrachteten zunächst die Integrale rationaler Funktionen, also solche der Form:

$$\int f(x)\,dx,$$

wo $f(x)$ eine rationale Funktion bedeutete. Sie führten immer wieder auf bekannte Funktionen, nämlich auf rationale Funktionen und Logarithmen. Dann und nur dann fielen die Logarithmen fort, wenn die Bedingungen der Nr. 431 erfüllt waren.

Bis dahin haben wir also als Integranden nur rationale Funktionen betrachtet, oder wie man auch sagt, wir sind im *natürlichen Rationalitätsbereich* geblieben. Der weitere Fortschritt bestand nun darin, daſs wir aus dem natürlichen Rationalitätsbereich heraustraten.

465. Abelsche Integrale. Nehmen wir nämlich eine algebraische Funktion X von x hinzu, die also durch eine algebraische Gleichung:

$$f_0(x) + f_1(x)X + \cdots f_m(x)X^m = 0$$

mit in x rationalen Koeffizienten definiert ist, und betrachten die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von x und X:

$$F(x, X),$$

so bilden diese einen durch „Adjunktion“ der Irrationalität X „erweiterten Rationalitätsbereich“. Das Integral von irgend einer Funktion $F(x, X)$ dieses Rationalitätsbereiches

$$\int F(x, X)\,dx$$

heifst ein *Abelsches Integral.* Da $F(x, X)$ ebenso wie X eine algebraische Funktion von x ist, so können wir sagen:

Ein Abelsches Integral ist das Integral einer algebraischen Funktion.

Die Abelschen Integrale enthalten also als Spezialfälle die oben betrachteten Integrale rationaler Funktionen, also im Besonderen die rationalen Funktionen selbst, den Logarithmus und die cyklometrischen Funktionen arc tang x und arc cotg x. Diese entstehen eben, wenn man den Integranden dem natürlichen Rationalitätsbereich entnimmt. Dies entspricht dem Falle, dafs der Grad m der Gleichung (1), der X genügt, gleich 1 ist.

Gehen wir nun einen Schritt weiter und nehmen den Fall, dafs X einer Gleichung vom Grade $m = 2$ genügt, so wird der Integrand eine rationale Funktion von x und einer Quadratwurzel aus einem Polynom. Bezeichnen wir daher diese Quadratwurzel wieder mit X, so erhält das Abelsche Integral die Gestalt:

$$\int F(x, X)\, dx,$$

wo

$$X^2 - f(x) = 0$$

und $f(x)$ eine ganze, rationale Funktion ist. Die so entstehenden Abelschen Integrale heifsen speziell *hyperelliptische* Integrale. Sie werden weiter unterschieden nach dem Grade des Polynoms $f(x)$. Ist $f(x)$ vom ersten Grade, so wird das Integral rational in x und $X = \sqrt{f(x)}$, wie aus den Entwickelungen der Nr. 433 f. hervorgeht. Ist $f(x)$ vom zweiten Grade, so können aufser rationalen Funktionen von x und X noch Logarithmen oder Arcussinusfunktionen auftreten, deren Argument rational in x und X ist (vgl. Nr. 435 ff.). Man kommt aber im Allgemeinen auf neue Transcendente, wenn der Grad n von $f(x)$ die Zahl 2 übersteigt; und zwar entsprechen den Fällen $n = 3$ und $n = 4$, wie wir gesehen haben, die *elliptischen* Integrale, die Fälle $n > 4$ führen hingegen auf die *hyperelliptischen Integrale im eigentlichen Sinne.* Reduziert sich ein elliptisches Integral auf bekannte Transcendenten, so spricht man von einem *pseudoelliptischen* Integrale.

Der letzte Spezialfall von Abelschen Integralen, den wir hervorheben wollen, ist der, dafs die algebraische Funktion X irgend einer „reinen" Gleichung, d. h. einer solchen der Form:

$$X^m - f(x) = 0$$

genügt, wo $f(x)$ ein Polynom ist. Die zu diesem Rationalitätsbereich gehörigen Abelschen Integrale sind von der Form:

$$\int F(x, \sqrt[m]{f(x)})\, dx. \tag{1}$$

Hierher gehören die in früheren Zeiten vielfach studierten *binomischen* Integrale. So bezeichnet man nämlich die Integrale der Form:

$$\int z^\alpha (a + b z^\beta)^\gamma\, dz,$$

wo α, β, γ rationale Zahlen, a und b Konstante sind. Ist nämlich m der Generalnenner von α, β, γ, so führt die Substitution:

$$x = z^{\frac{1}{m}}, \quad z = x^m, \quad dz = m x^{m-1}\, dx$$

das Integral über in

$$m \int x^{m\alpha + m - 1} \sqrt[m]{(a + b x^{m\beta})^{m\gamma}}\, dx,$$

welches offenbar die obige Form (1) hat, da $m\alpha + m - 1$, $m\beta$ und $m\gamma$ ganze Zahlen sind.

466. Die Integrale bekannter Transcendenten. Die weiteren Typen, die wir behandelt haben, lassen sich dadurch charakterisieren, dafs wir zu dem natürlichen Rationalitätsbereich noch eine bekannte Transcendente wie,

$$\begin{array}{ll} X = e^x, & X = lx \\ X = \sin x, & X = \arcsin x \\ X = \cos x, & X = \arccos x \\ X = \operatorname{tang} x, & X = \operatorname{arc\,tang} x \\ X = \operatorname{ctg} x, & X = \operatorname{arc\,ctg} x \end{array}$$

adjungierten und nun wieder die Integrale der Form:

$$\int F(x, X)\, dx$$

betrachteten, wo F eine rationale Funktion bedeutet.

Diese Integrale reduzieren sich zum Teil aufeinander, wenn man beachtet, dafs lx und e^x, $\arcsin x$ und $\sin x$ u. s. w inverse Funktionen sind, und dafs $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ ist. Beispiele hierfür liefert der letzte Paragraph. — Hier wollen wir nur den Fall herausheben, dafs $X = e^x$ ist und unser Integral die Form hat

$$\int F(x, e^x)\, dx,$$

wo F eine rationale Funktion des ersten und eine ganze rationale Funktion des zweiten Argumentes ist. Das Integral ist dann eine Summe von Integralen der Form

$$(1) \qquad \int x^n e^x\, dx,$$

wo n eine ganze positive Zahl ist, und von solchen der Form

$$(2) \qquad \int \frac{e^x}{(x-a)^m}\, dx,$$

wo m ebenfalls eine ganze positive Zahl ist. Die Integrale (1) führen aber nach Nr. 457 auf bekannte Funktionen, die Integrale der Form (2) erhalten durch Einführung von

$$x - a = -z$$

die Gestalt:

$$(-1)^{m-1} \int \frac{e^{-z}}{z^m}\, dz$$

und führen daher nach Nr. 457 auf den Integrallogarithmus:

$$li(e^{-z}) = \int \frac{e^{-z}\, dz}{z}$$

als einzige neue Transcendente.

Hiermit haben wir das bisher Gewonnene wenigstens in seinen wesentlichsten Resultaten systematisch zusammengefafst.

Drittes Kapitel.

Theorie der bestimmten Integrale.

---

467. Ziel der Entwickelungen dieses Kapitels. Während wir bisher das Integral wesentlich als Funktion der oberen Grenze studierten, werden wir in diesem Kapitel beiden Grenzen des Integrales feste Zahlenwerte erteilen und den dazugehörigen Integralwert studieren.

Einmal kann dann der Integrand neben der Integrationsveränderlichen nur noch feste Zahlen enthalten; dann erhebt sich die Aufgabe, den numerischen Wert dieses Integrales zu ermitteln. (§ 2 dieses Kap.). Sodann kann der Integrand noch andere von der Integrationsveränderlichen unabhängige Variabele enthalten und dann entsteht das Problem, das Integral als Funktion dieser Veränderlichen, der sogenannten Parameter, zu studieren. Hierbei werden wir nur den Fall eines Parameters behandeln und besonders die Frage der Differentiation und Integration nach diesem Parameter ins Auge fassen. (§ 3 dieses Kap.). Wir werden erkennen, dafs die Auffassung der Integrale als Funktionen eines Parameters ein wichtiges Mittel zur Definition neuer Funktionen ist, während wir hinwiederum, wenn wir den Parameter nachträglich numerisch spezialisieren, wieder auf die numerische Auswertung bestimmter Integrale geführt werden. (§ 4 dieses Kap.). Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei die Integraldarstellung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe. (§ 5 dieses Kap.). Welche Zahlenwerte die Grenzen des bestimmten Integrales haben, ist insofern gleichgültig, als man diese bei Einführung geeigneter Veränderlicher ganz willkürlichen Zahlen gleichmachen kann. (§ 6 dieses Kap.).

Besonders bequem sind oft die Grenzen $+\infty$ oder $-\infty$. Indes bedarf auch hier wieder das Operieren mit unendlich grofsen Werten einer schärferen Begründung. Diese wird im ersten Paragraphen dieses Kapitels vorangeschickt und mit ihr wollen wir jetzt beginnen.

§ 1. Definition des Integrales, wenn unendlich grofse Werte in Frage kommen.

468. Beispiele für unendliche Grenzen. Bisher wurden bei der Definition, wie bei der Untersuchung der Eigenschaften eines bestimmten Integrals die Grenzen x_0 und X als beliebige, aber feste Zahlen vorausgesetzt. Wir werden nun den Fall untersuchen, dafs die eine oder die andere dieser Grenzen unendlich wird.

Das Integral der Funktion $f(x)$, gebildet zwischen zwei unendlichen Grenzen, oder zwischen einer endlichen und einer unendlichen, kann einen endlichen Wert erhalten, es kann aber auch unendlich oder unbestimmt werden, wenn man den Grenzwert zu bestimmen sucht, nach welchem das Integral konvergiert, während man die Grenzen desselben über jeden Betrag hinaus wachsen läfst. Wir wollen zunächst Beispiele für diese verschiedenen Fälle geben.

1. Die Funktion e^{-x} liefert, integriert zwischen den Grenzen x_0 und X:

$$\int_{x_0}^{X} e^{-x}\,dx = e^{-x_0} - e^{-X}.$$

Läfst man nun X nach $+\infty$ konvergieren, so folgt:

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-x_0}.$$

Läfst man aber x_0 nach $-\infty$ konvergieren, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{X} e^{-x}\,dx = +\infty.$$

2. Das Integral von $\frac{1}{1+x^2}$ zwischen den Grenzen x_0 und X ist:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} X - \operatorname{arc\,tang} x_0,$$

und läfst man X nach $+\infty$ konvergieren, so wird

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x_0,$$

und läfst man nun x_0 nach $-\infty$ konvergieren, so wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3. Die Funktion $\cos x$ giebt, zwischen den Grenzen 0 und X integriert:

$$\int_0^X \cos x\, dx = \sin X.$$

Es ist einleuchtend, dafs dieses Integral zwar endlich bleibt, aber keinem bestimmten Werte zustrebt, wenn man X unendlich werden läfst.

469. Ein allgemeiner Satz über Integrale mit unendlichen Grenzen. Man kann kein allgemeines, aus der Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ abgeleitetes Kriterium aufstellen, welches in allen Fällen entscheiden läfst, ob das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ endlich und bestimmt bleibt, wenn die eine oder die andere der Grenzen unendlich wird. Indessen kann man doch einen Satz aufstellen, welcher bei einer sehr grofsen Anzahl von Fällen ein Mittel zur Entscheidung giebt. Er lautet:

Lehrsatz. *Es sei $f(x)$ stetig für jedes endliche x, dafs nicht kleiner als eine feste Zahl x_0 ist. Wenn nun bei allen Werten von x, welche gröfser sind als eine bestimmte Zahl α, der Betrag des Produktes $x^n f(x)$ beständig kleiner ist als eine bestimmte Zahl K, und dabei der Exponent n gröfser als 1 ist, so konvergiert das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ nach einer endlichen bestimmten Grenze, während man X nach $+\infty$ konvergieren läfst.*

Wenn dagegen die Funktion $f(x)$ bei allen Werten von x, welche gröfser sind als eine bestimmte Zahl α, stets dasselbe Zeichen behält, und der Betrag des Produktes $x^n f(x)$ niemals kleiner wird als eine bestimmte Zahl K, während der Exponent n gleich oder kleiner als 1 ist, so wird auch das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ zugleich mit X unendlich.

Es ist nämlich

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite hat einen bestimmten Wert; es genügt demnach nur das zweite zu betrachten.

1. Ist der Betrag des Produktes $x^n f(x)$ kleiner als K, für alle Werte von x zwischen α und $+\infty$, so ist einleuchtend, dafs auch der Betrag des Integrales $\int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ stets kleiner ist als

$$\int_{\alpha}^{X} \frac{K}{x^n}\,dx = \frac{K}{n-1}\left[\frac{1}{\alpha^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right].$$

Dieser Ausdruck wird aber, unter der Annahme, dafs $n > 1$ ist, für $X = \infty$, gleich

$$\frac{K}{(n-1)\,\alpha^{n-1}}.$$

Also bleibt das Integral $\int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ für $X = \infty$ endlich und wird bei beliebig wachsenden Werten von α beliebig klein, und mithin konvergiert auch

$$\int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx,$$

wenn man α über jede Grenze wachsen läfst, nach einem bestimmten endlichen Werte.

2. Ist der Betrag des Produktes $x^n f(x)$ nicht kleiner als eine bestimmte Zahl K bei allen Werten von x zwischen α und $+\infty$, und behält die Funktion $f(x)$ stets dasselbe Zeichen,

so ist der Betrag des Integrales $\int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ größer als $\int_{\alpha}^{X} \frac{K}{x^n}\,dx$. Dieses letzte Integral hat den Wert

$$\frac{K}{1-n}(X^{1-n}-\alpha^{1-n}),$$

wenn $n<1$ ist, und

$$K\log\frac{X}{\alpha},$$

wenn $n=1$ ist. In beiden Fällen wird derselbe für $X=\infty$ unendlich. Also gilt dies auch für das ursprüngliche Integral.

Die Bedingung des Satzes kann man etwas ungenauer auch so aussprechen: Die zu integrierende Funktion $f(x)$ mufs, wenn sie bei beliebig wachsenden Werten von x ihr Zeichen nicht mehr wechselt, von höherer als der ersten Ordnung für $x=\infty$ verschwinden, damit das Integral auch für $x=\infty$ endlich und bestimmt bleibt.

Bemerkung. Der vorstehende Satz gilt ebenso für den Fall, dafs X nach $-\infty$ konvergiert. Denn verwandelt man x in $-x$, so ist

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{-x_0}^{-X} f(-x)\,dx,$$

und man hat also die obere Grenze $-X$ nach $+\infty$ konvergieren zu lassen.

Derselbe Satz ist auch noch anwendbar in dem Falle, dafs die untere Grenze x_0 nach $\pm\infty$ konvergiert, da man die beiden Grenzen mit einander vertauschen kann.

470. Anwendungen. 1. Wir betrachten das Integral $\int_{x_0}^{X} e^{-x^2}\,dx$. Ist n eine beliebig grofse Zahl, K irgend eine bestimmte positive Zahl, so konvergiert der Betrag des Produktes $x^n e^{-x^2}$ nach null, wenn x gleich $\pm\infty$ wird. Man kann also einen Wert α für x so fixieren, dafs von $x=+\alpha$ bis $x=+\infty$, oder von $x=-\alpha$ bis $x=-\infty$ der Betrag des Produktes $x^n e^{-x^2}$ kleiner als K wird. Hieraus folgt, dafs das vorgelegte Integral einen endlichen bestimmten Wert $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ behält, wenn X nach $+\infty$ und x_0 nach $-\infty$ konvergiert.

Allgemeiner noch erkennt man: Wenn $f(x)$ eine in jedem endlichen Intervalle stetige Funktion ist, deren Betrag bei allen Werten von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ eine feste Zahl nicht übersteigt, so hat auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx$$

einen endlichen und bestimmten Wert.

471. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Das aufgestellte Kriterium entscheidet nichts über die Giltigkeit eines Integrales bei unendlicher Grenze, sobald die Funktion unter dem Integrale mit beliebig wachsenden Werten von x fortwährend ihr Zeichen wechselt. In diesem Falle kann das Integral einer endlichen bestimmten Grenze zustreben, ohne dafs die Funktion in bestimmter Weise von niederer als der ersten Ordnung für $x = \infty$ verschwindet. Ein wichtiges Beispiel dieser Art bietet das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Hier wird $f(x) \cdot x = \sin x$ eine Funktion, die bei beliebig wachsenden Werten von x immer zwischen den Grenzen -1 und $+1$ oscilliert. Dafs dieses Integral nichtsdestoweniger einen bestimmten Wert hat, läfst sich leicht einsehen. Denn betrachtet man zunächst das Integral zwischen den Grenzen 0 und w, wobei w irgend ein Wert zwischen zwei ganzen Vielfachen von π ist, $w = k\pi + \alpha$ (k ganze Zahl, $\alpha \leqq \pi$), so ist:

$$\int_0^w \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{k\pi+\alpha} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Die Glieder dieser Reihe, die für $k = \infty$ eine unendliche wird, bekommen wechselnde Zeichen und ihre Beträge nehmen ab. Denn vergleicht man die Integrale

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \text{und} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

so wird, wenn man in dem zweiten Integrale, vermittelst der Substitution $y = x - \pi$, die Grenzen denen des ersten gleich macht:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin (y+\pi)}{y+\pi}\, dy = -\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{y+\pi}\, dy.$$

Mit wachsenden Werten von k konvergieren die Beträge dieses Integrales nach null; denn der Betrag ist kleiner als der des Integrales

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dy}{y+\pi} = l\left(\frac{k+1}{k}\pi\right).$$

Mithin hat die unendliche Reihe und folglich das gegebene Integral für $w = \infty$ einen bestimmten Wert. In Nr. 498 werden wir finden, dafs dieser Wert gleich $\frac{\pi}{2}$ ist.

472. Definition des Integrales, wenn der Integrand an den Grenzen unendlich wird. Wir nehmen an, dafs $f(x)$ stetig ist für alle Werte von x zwischen x_0 und X, dafs es jedoch unendlich wird für $x = X$, d. h. über jede Grenze wächst, wenn x nach X konvergiert. Bezeichnet man mit ε eine Zahl von demselben Zeichen wie $X - x_0$, so versteht man unter dem Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ den Grenzwert, welchen

$$\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\, dx$$

erhält, wenn ε null wird. Dieser ist entweder endlich oder unendlich oder unbestimmt.

Desgleichen ist, wenn $f(x)$ unendlich wird, für $x = x_0$ das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ die Grenze, nach welcher $\int_{x_0+\varepsilon}^{X} f(x)\, dx$ konvergiert, wenn man mit ε wiederum eine Zahl von gleichem Zeichen wie $X - x_0$ bezeichnet, die sich dem Werte null beliebig nähert.

Wir wollen nun einen Satz beweisen, analog zu dem in Nr. 468, auf Grund dessen man in gewissen Fällen entscheiden kann, ob ein Integral einen endlichen Wert behält, wenn die zu integrierende Funktion an den Grenzen unendlich wird.

473. Ein allgemeiner Satz über Integrale, deren Integrand an den Grenzen unendlich wird. *Es sei $f(x)$ stetig für alle Werte von x zwischen x_0 und X, aber unendlich für $x = X$. Kann man nun eine Zahl α zwischen x_0 und X angeben, so dafs für alle Werte von x zwischen α und X der Betrag des Produktes $(X - x)^n f(x)$ oder $(x - X)^n f(x)$ kleiner ist als eine bestimmte Zahl K, während n kleiner als 1 ist, so hat auch das Integral $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ einen bestimmten endlichen Wert.*

Wenn man dagegen eine Zahl α zwischen x_0 und X angeben kann, so dafs bei allen Werten von x zwischen α und X das Produkt $(X - x)^n f(x)$ oder $(x - X)^n f(x)$ dasselbe Zeichen behält und beständig gröfser ist als eine bestimmte Zahl K, während n gleich oder gröfser als 1 ist, so wird das Integral $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ unendlich.

Denn es ist

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx + \lim \int\limits_{\alpha}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite hat einen endlichen bestimmten Wert; es handelt sich also nur noch um den Grenzwert des zweiten.

1. Ist von $x = \alpha$ bis $x = X$ der Betrag des Produktes $(X - x)^n f(x)$ immer kleiner als eine bestimmte Zahl K, während n kleiner als 1 ist, so leuchtet ein, dafs der Betrag des Integrales kleiner ist als der Betrag von

$$\int\limits_{\alpha}^{X-\varepsilon} K \frac{dx}{(X - x)^n} = \frac{(X - \alpha)^{1-n} - \varepsilon^{1-n}}{1 - n} K.$$

Konvergiert ε nach null, so wird die rechte Seite, weil $1 - n > 0$ ist, gleich

$$\frac{(X - \alpha)^{1-n}}{1 - n} K,$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein, wenn α dem Werte X beliebig genähert wird. Mithin konvergiert

$$\int_{\alpha}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$$

für $\varepsilon = 0$ nach einer Grenze, deren Betrag durch Wahl von α beliebig klein gemacht werden kann, d. h. auch

$$\int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

hat für $\alpha = X$ einen bestimmten endlichen Wert.

2. Nehmen wir an, dafs von $x = \alpha$ bis $x = X$ das Produkt $(X - x)^n f(x)$ immer dasselbe Vorzeichen behält, und dafs sein Betrag immer gröfser ist als eine bestimmte Zahl K, während die Zahl n gleich oder gröfser als 1 ist. Der Betrag des Integrales $\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$ wird dann gröfser als der Betrag von $\int_{\alpha}^{x} \frac{K\,dx}{(X-x)^n}$; nun ist aber, wenn $n > 1$ ist:

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{K\,dx}{(X-x)^n} = \frac{K}{1-n}\left[\frac{1}{(X-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(X-x)^{n-1}}\right],$$

und wenn $n = 1$ ist:

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{K\,dx}{X-x} = K \log \frac{X-\alpha}{X-x}.$$

In jeder dieser Formeln wird die rechte Seite unendlich für $x = X$, und folglich ist auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\alpha}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$$

für $\varepsilon = 0$ unendlich.

Da man die Grenzen eines Integrales vertauschen kann, so gilt der vorstehende Satz auch für den Fall, dafs $f(x)$ für $x = x_0$ unendlich wird.

474. Beispiele. 1. Wir betrachten das Integral:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hier ist $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Ist x positiv, so ist dieser Wert kleiner als 1. Hieraus schliefst man, dafs das Integral einen bestimmten endlichen Wert hat. Übrigens wissen wir hier von vornherein, dafs dieses der Fall ist. Denn das Integral, gebildet von 0 bis $x < 1$, hat den Wert $\arcsin x$, und für $x = 1$ konvergiert diese Funktion nach dem Werte $\frac{\pi}{2}$.

2. Für das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei k^2 eine positive Zahl kleiner als 1 ist, wird

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}.$$

Die rechte Seite ist kleiner als $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ für alle Werte von x von 0 bis $+1$; also hat das Integral einen endlichen Wert.

3. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2},$$

auf welches sich das vorhergehende reduziert, für $k^2 = 1$. Hier ist $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und $(1-x) f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Die rechte Seite ist gröfser als $\frac{1}{2}$ bei allen Werten von x von 0 bis 1. Folglich wird das Integral unendlich. Übrigens ist dieses Integral gleich dem Werte, den die Funktion

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

für $x = 1$ annimmt, und man sieht, dafs dieser Wert in der That unendlich wird.

4. Wir betrachten schliefslich noch das Integral

$$\int_0^1 \frac{lx}{x^n}\, dx,$$

in welchem n eine Zahl zwischen 0 und 1 bezeichnet. Hier ist $f(x) = \frac{lx}{x^n}$, und diese Funktion wird unendlich für $x = 0$. Bezeichnet man mit ε eine Zahl zwischen 0 und $1 - n$, so ist

$$x^{n+\varepsilon} f(x) = x^\varepsilon \, l x.$$

Konvergiert x nach null, so konvergiert auch das Produkt $x^\varepsilon lx$ nach null. Man kann also eine Zahl α bestimmen, so dafs von $x = 0$ bis $x = \alpha$ das Produkt $x^{n+\varepsilon} f(x)$ kleiner ist als eine gegebene Zahl K; ferner ist $n + \varepsilon$ kleiner als 1. Also hat das Integral einen endlichen Wert.

475. Der Integrand wird zwischen den Grenzen unendlich. Wird die Funktion $f(x)$ unendlich für einen Wert x_1 von x, der zwischen x_0 und $X > x_0$ enthalten ist, d. h. wachsen die Beträge der Funktion über jede Grenze, wenn x von der einen oder andern Seite oder von beiden nach dem Werte x_1 konvergiert, so versteht man unter dem Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ die Grenze, nach welcher die Summe

$$\int_{x_0}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_1 + \eta}^{X} f(x)\, dx$$

konvergiert, wenn die Zahlen ε und η dem Werte null sich beliebig nähern. Solch ein Integral kann einen endlichen und bestimmten Wert haben, es kann aber auch unendlich oder unbestimmt werden.

Betrachten wir z. B. das Integral

$$\int_{-\alpha}^{a} \frac{dx}{x^n},$$

in welchem a und α positive Zahlen bezeichnen und der Exponent n zwischen null und eins enthalten ist. Die zu

integrierende Funktion ist eine eindeutig reelle, wenn wir annehmen, daſs der Nenner des Exponenten eine ungerade Zahl ist. Nun ist:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dx}{x^n} = \lim\left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^n} + \int_{+\eta}^{+\alpha}\frac{dx}{x^n}\right),$$

aber

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^n} = \frac{(-\varepsilon)^{1-n} - (-\alpha)^{1-n}}{1-n}, \quad \int_{\eta}^{\alpha}\frac{dx}{x^n} = \frac{\alpha^{1-n} - \eta^{1-n}}{1-n},$$

also:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon=0,\ \eta=0}\frac{\alpha^{1-n} - \eta^{1-n} + (-\varepsilon)^{1-n} - (-\alpha)^{1-n}}{1-n};$$

$(-\varepsilon)^{1-n}$ und η^{1-n} werden im Grenzfalle null. Das vorgelegte Integral hat also einen endlichen und bestimmten Wert, nämlich

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dx}{x^n} = \frac{\alpha^{1-n} - (-\alpha)^{1-n}}{1-n}.$$

Ist n gröſser als eins, so wird:

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-\varepsilon)^{n-1}}\right], \quad \int_{\eta}^{\alpha}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\eta^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right].$$

Die Summe dieser beiden Integrale, nämlich:

$$\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-\varepsilon)^{n-1}}\right] + \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\eta^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right],$$

wächst über jede Grenze, wenn die Zahlen ε und η nach null konvergieren. Also wird auch das vorgelegte Integral unendlich.

Wir untersuchen noch den Fall $n = 1$. Das gegebene Integral ist dann:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dx}{x} = \lim\left[\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{\alpha}\frac{dx}{x}\right].$$

Setzt man $x = -t$, $dx = -dt$, so ist:

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}=\int_{\alpha}^{\varepsilon}\frac{dt}{t}=\log\frac{\varepsilon}{\alpha}$$

und

$$\int_{+\eta}^{a}\frac{dx}{x}=\log\frac{a}{\eta},$$

also ist:

$$\int_{-\alpha}^{+a}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon=0,\ \eta=0}\log\frac{a\,\varepsilon}{\alpha\,\eta}=\log\frac{a}{\alpha}+\lim_{\varepsilon=0,\ \eta=0}\log\frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Die Grenze des Verhältnisses $\frac{\varepsilon}{\eta}$ ist unbestimmt; also ist auch das Integral $\int_{-\alpha}^{a}\frac{dx}{x}$ selbst unbestimmt.

476. Hauptwert eines Integrales und singuläres Integral. Der allgemeine Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{x_1+\eta}^{X}f(x)\,dx \tag{1}$$

reduziert sich, wenn man $\varepsilon=\eta$ annimmt, auf

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon}^{X}f(x)\,dx. \tag{2}$$

Die Grenze, welcher diese Summe zustrebt, wenn man ε nach 0 konvergieren läfst, hat Cauchy den *Hauptwert* des Integrales $\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx$ genannt. Also ist der Hauptwert des Integrales $\int_{-\alpha}^{+a}\frac{dx}{x}$ der Wert $\log\frac{a}{\alpha}$.

Wenn das Integral $\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx$ einen endlichen und bestimmten Wert hat, so ist dieser Wert auch die Grenze, nach welcher die Summe

$$\int_{x_0}^{x_1-\mu\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{x_1+\nu\varepsilon}^{X}f(x)\,dx \tag{3}$$

konvergiert, wenn ε null wird, die positiven Zahlen μ und ν mögen irgend welche Werte haben. Also muſs auch die Differenz der Summen (2) und (3), nämlich:

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\nu\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{4}$$

mit ε nach null konvergieren, was auch die Werte von μ und ν sein mögen. Kann man konstatieren, daſs dieses nicht eintritt, so läſst sich hieraus schlieſsen, daſs das vorgelegte Integral keinen endlichen, bestimmten Wert hat. Die Integrale

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\nu\varepsilon} f(x)\,dx,$$

in denen ε null wird, hat Cauchy die *singulären bestimmten Integrale* genannt.

Wird die Funktion $f(x)$ unendlich für die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ zwischen x_0 und X, so muſs man $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ als den Grenzwert definieren, nach welchem die Summe

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta_1}^{x_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \int_{x_2+\eta_2}^{x_3-\varepsilon_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+\eta_{-1}}^{x_n-\varepsilon_n} f(x)\,dx + \int_{x_n+\eta_n}^{X} f(x)\,dx$$

konvergiert, wenn die Zahlen ε und η sämtlich null werden. Dieser Fall kommt, wie man sieht, auf den vorigen zurück, wenn man sich das Intervall von x_0 bis X in mehrere andere zerlegt.

§ 2. Anwendung der vorigen Entwickelungen auf die Berechnung bestimmter Integrale.

477. Berechnung des bestimmten Integrales aus dem unbestimmten. Es giebt eine groſse Anzahl bestimmter Integrale, welche in den Anwendungen der Analysis häufig auftreten und deren Berechnung mit Hilfe der vorigen Entwickelungen ausgeführt werden kann. Wir wollen hier die verschiedenen Methoden angeben, welche bei derartigen Untersuchungen zu gebrauchen sind.

Wir bemerken vor allem, daſs das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

unmittelbar erhalten wird, sobald man das unbestimmte Integral des Differentiales $f(x)\,dx$ vermittelst *bekannter* Funktionen ausdrücken kann. Denn bezeichnet man dieses mit $F(x) + \text{const}$, so hat man

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Dies gilt auch bei der Berechnung des bestimmten Integrales für Grenzen, welche unendlich werden, sobald die Funktion $F(x)$ bei diesem Grenzprozesse einen bestimmten endlichen Wert erhält.

Mit dieser ersten Methode behandeln wir folgende Beispiele.

1. Es ist:

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \qquad \int e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} + C$$

und hieraus schlieſst man, wenn $a > 0$ angenommen wird:

$$(1) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. In Nr. 456 wurden die Integrale berechnet:

$$\int e^{-ax} \cos bx\,dx = -e^{-ax}\,\frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} + C,$$

$$\int e^{-ax} \sin bx\,dx = -e^{-ax}\,\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Hieraus folgt unter der Annahme, daſs $a > 0$ ist:

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2};$$

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

3. Den Wert des Integrales $\sin^m x\,dx$ haben wir in Nr. 462 kennen gelernt für den Fall, daſs m eine ganze positive, gerade oder ungerade Zahl ist. Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$(4)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$(5)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}.$$

Diese Integrale verwandeln sich in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx,$$

wenn man x durch $\frac{\pi}{2}-x$ ersetzt, und in

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wenn man $\sin x$ durch x, dx durch $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ersetzt.

4. Wir hatten in Nr. 460 gefunden:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx.$$

Sind m und n positive ganze Zahlen und $n>1$, so erhält man, indem man das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bildet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx.$$

Ersetzt man n einmal durch $2n$, sodann durch $2n+1$, wobei n immer eine ganze Zahl bedeutet, so ist nach dieser Reduktionsformel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(m+2n)(m+2n-2)\cdots(m+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}{(m+2n+1)(m+2n-1)\cdots(m+3)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x\,dx.$$

Das Integral von $\sin^m x \cos x\,dx$ ist

$$\frac{\sin^{m+1}}{m+1} + C,$$

also ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x\,dx = \frac{1}{m+1};$$

mithin wird das zweite der obigen Integrale

$$(6)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{(m+1)(m+3)\cdots(m+2n+1)}.$$

Schreibt man in dem andern Integrale $2m$ an Stelle von m, so hat man nach Gleichung (4):

$$(7)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots(2m+2n)}\cdot\frac{\pi}{2};$$

das Integral in der Gleichung (6) wird gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^m x\,dx$$

durch Änderung von x in $\frac{\pi}{2} - x$.

478. Berechnung von $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$. Das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x},$$

in welchem p eine positive Zahl kleiner als 1 ist, hat einen endlichen Wert. Denn für $x = 0$ wird der Integrand zwar unendlich, aber von niederer als der ersten Ordnung und das Gleiche gilt für $x = \infty$, wie die Substitution $x = \frac{1}{t}$ lehrt. Dieses, zuerst von Euler untersuchte Integral hat eine wichtige Rolle in der Theorie der bestimmten Integrale und läfst sich, wie nun gezeigt werden soll, durch eine einfache Betrachtung rationaler Integrale berechnen. Wir bezeichnen mit m und n zwei ganze positive Zahlen, so dafs $m < n$ ist, und zerlegen den rationalen Bruch

$$\frac{n z^{2m}}{1 + z^{2n}}$$

in seine Partialbrüche.

Setzt man

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

so sind die Wurzeln der Gleichung $1 + z^{2n} = 0$ durch die Formel $e^{\pm i\varphi_k}$ dargestellt, wenn man k die Werte $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ beilegt. Die Summe T_k der beiden Partialbrüche, welche zu den konjugierten Werten $e^{+i\varphi_k}$ und $e^{-i\varphi_k}$ gehören, wird

$$T_k = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(2m+1)\varphi_k}}{z - e^{i\varphi_k}} + \frac{e^{-i(2m+1)\varphi_k}}{z - e^{-i\varphi_k}}\right]$$

$$= \frac{-(z - \cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k + \sin\varphi_k \sin(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}.$$

Integriert man T_k zwischen den Grenzen $z = -Z$ und $z = +Z$, so folgt:

$$\int\limits_{-Z}^{+Z} T_k\,dz = -\frac{1}{2}\cos(2m+1)\varphi_k \log\frac{(Z-\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}{(Z+\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}$$

$$+ \sin(2m+1)\varphi_k\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{Z-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} + \operatorname{arc\,tang}\frac{Z+\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right].$$

Läßt man Z unendlich werden, so konvergiert der Logarithmus in dieser Gleichung nach dem Werte null, und die beiden Kreisbogen werden gleich $\frac{\pi}{2}$, weil φ_k kleiner als π, also $\sin \varphi_k$ positiv ist. Es ist also

$$\lim_{Z=\infty} \int_{-Z}^{+Z} T_k \, dz = \pi \sin (2m+1) \varphi_k.$$

Setzt man

$$\alpha = \frac{2m+1}{2n} \pi,$$

so ist

$$(2m+1)\varphi_k = (2k+1)\alpha, \quad \text{also} \quad \lim_{Z=\infty} \int_{-Z}^{+Z} T_k \, dz = \pi \sin (2k+1)\alpha.$$

Nun ist

$$\frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1},$$

folglich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} \, dz = \lim_{Z=\infty} \int_{-Z}^{Z} (T_0 + T_1 + \cdots + T_{n-1}) \, dz$$

$$= \pi [\sin \alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin (2n-1)\alpha].$$

Multipliziert man die in der Klammer enthaltene Summe mit $2 \sin \alpha$, so erhält man ein Produkt gleich

$$(1-\cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \cdots + [\cos (2n-2)\alpha - \cos 2n\alpha],$$

also gleich:

$$1 - \cos 2n\alpha = 1 - \cos (2m+1)\pi = 2.$$

Demnach wird, indem man für α seinen Wert einsetzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} \, dz = \frac{\pi}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{\sin \left(\frac{2m+1}{2n} \pi \right)}, \qquad (m \leqq n-1).$$

Das Integral, dessen Wert wir hier bestimmt haben, ist gleich der Summe der beiden folgenden:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} \, dz, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} \, dz.$$

Diese beiden sind einander gleich, denn das erste Integral geht in das zweite über, wenn man z durch $-z$ ersetzt. Demnach ist auch

$$2n\int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

Da die Variabele z jetzt positiv bleibt, machen wir die Substitution

$$z = x^{\frac{1}{2n}}, \quad 2n\,dz = x^{\frac{1}{2n}-1}\,dx,$$

und setzen

$$\frac{2m+1}{2n} = p.$$

Die obige Gleichung erhält dann die Form:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \tag{8}$$

und dies ist die gesuchte Gleichung. Sie ist zunächst unter der Annahme bewiesen, daſs die Zahl p, die zwischen 0 und 1 liegt, von der Form $\frac{2m+1}{2n}$ ist, wobei m und n beliebige ganze Zahlen sind und $m \leqq n-1$ ist. Die beiden Seiten dieser Gleichung sind aber stetige Funktionen von p. Von der linken Seite erkennt man dies folgendermaſsen. Das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p+\delta-1}-x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}(x^\delta-1)}{1+x}\,dx$$

kann durch Wahl eines beliebig kleinen Betrages von δ beliebig klein gemacht werden; denn es lassen sich zuerst die Zahlen ε und w so bestimmen, daſs die Integrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{x^{p+\delta-1}-x^{p-1}}{1+x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_w^\infty \frac{x^{p+\delta-1}-x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

unabhängig von einer weiteren Verkleinerung des Betrages von δ ihrem Betrage nach beliebig klein werden, und alsdann läſst sich δ so fixieren, daſs

$$\int_\varepsilon^w \frac{x^{p-1}(x^\delta-1)}{1+x}\,dx$$

beliebig klein wird. Aus der Stetigkeit der beiden Seiten in der Gleichung (8) folgt, dafs diese bei allen Werten von p zwischen 0 und 1 übereinstimmen, denn man kann immer eine unendliche Reihe von rationalen Brüchen von der Form $\frac{2m+1}{2n}$ bilden, welche nach der Grenze p konvergiert.

479. Berechnung von $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\, dx$. Ein gleicher Weg führt zur Bestimmung des Integrales

$$u = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\, dx,$$

in welchem p ebenfalls eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Dieses Integral hat einen endlichen bestimmten Wert, weil die zu integrierende Funktion für $x = 0$ von niederer als der ersten Ordnung unendlich wird, und für $x = 1$ endlich bleibt. Transformiert man x in $\frac{1}{x}$, dx in $-\frac{dx}{x^2}$, so werden die Grenzen ∞ und 1; dieselben lassen sich aber vertauschen, wenn man das Vorzeichen ändert; es wird also

$$u = \int\limits_1^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-}}{1-x}\, dx,$$

und durch Addition der beiden Gleichungen folgt:

$$u = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\, dx.$$

Wir nehmen nun an, dafs p eine rationale Zahl von der Form

$$p = \frac{2m+1}{2n}$$

ist. Führt man die Substitution

$$x = z^{2n}, \quad dx = 2n z^{2n-1} dz$$

aus, so wird

$$u = n \int\limits_0^\infty \frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1 - z^{2n}}\, dz.$$

Die Funktion unter dem Integrale ist eine rationale, deren Zähler und Nenner von gerader Ordnung sind; denn $2np$ ist eine ganze ungerade Zahl. Man kann demnach das Integral von der unteren Grenze $-\infty$ an beginnen, wenn man nur das Mittel desselben nimmt; es ist also

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1 - z^{2n}} dz.$$

Die Wurzeln des Nenners sind die Werte

$$e^{\frac{\pm k\pi i}{n}} = \cos\frac{k\pi}{n} \pm i \sin\frac{k\pi}{n};$$

k hat dabei die Werte $1, 2, 3 \ldots n-1$. Nennt man wiederum T_k die Summe der beiden Partialbrüche, welche zu konjugierten Wurzeln gehören, so wird

$$T_k = \sin 2kp\pi \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\left(z - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}},$$

und hieraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \sin 2kp\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{n} dz}{\left(z - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

Setzt man $z - \cos\frac{k\pi}{n} = t \sin\frac{k\pi}{n}$, so ist dieses Integral gleich $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, also gleich $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ oder π. Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \pi \sin 2kp\pi = \frac{\pi}{2} \frac{\cos(2k-1)p\pi - \cos(2k+1)p\pi}{\sin p\pi};$$

giebt man nun k die Werte $1, 2, \ldots n-1$, addiert alsdann die verschiedenen Quotienten und beachtet, dafs

$$\cos(2n-1)p\pi = -\cos p\pi$$

ist, weil $2np$ eine ungerade ganze Zahl ist, so wird

$$u = \pi \operatorname{cotg} p\pi,$$

oder

$$(9) \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{cotg} p\pi,$$

eine Gleichung, die bei allen Werten von p zwischen 0 und 1 giltig ist.

430. Partialbruchzerlegung von $\operatorname{cotg} p\pi$. Das Resultat, welches wir zuletzt gewonnen haben, führt in einfacher Weise zu einer Entwickelung der Funktionen $\operatorname{tang} x$ und $\operatorname{cotg} x$ in eine unendliche Reihe von Partialbrüchen.

Denn wenn man den Quotienten $\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$ vermittelst algebraischer Division in eine Reihe entwickelt, so erhält man

$$\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (x^{m+p-1} - x^{m-p}),$$

eine Reihe, die konvergent ist, solange $0 < x < 1$, und die innerhalb dieses Intervalles gleichmäfsig konvergiert, die aber divergiert für $x = 0$; für $x = 1$ ist die Gleichung ungiltig. Multipliziert man beide Seiten mit dx und integriert zwischen den Grenzen 0 und 1, so folgt, indem man das Restglied

$$R_n(x) = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p}}{1-x}$$

einführt:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}\,dx}{1-x} = \sum_{m=0}^{m=n-1} \int_0^1 (x^{m+p-1} - x^{m-p})\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p}}{1-x}\,dx.$$

Es wird nun $\int_0^1 x^n \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx$ durch passende Wahl von n beliebig klein; denn bezeichnet θ einen echten Bruch, so kann man das Integral zerlegen in:

$$\int_0^\theta x^n \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_\theta^1 x^n \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx.$$

Auf das erste Integral läfst sich, weil der Quotient ein unveränderliches Vorzeichen hat, der Mittelwertsatz der Nr. 424 anwenden, demzufolge es gleich ist dem Produkte aus einem

mittleren Werte von x^n im Intervalle von 0 bis θ, multipliziert mit dem Integrale des zweiten Faktors; also

$$\int_0^\theta x^n \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = M(x^n)\int_0^\theta \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx.$$

Das zweite Integral kann man gleich setzen dem Produkte aus einem mittleren Werte des Quotienten, multipliziert mit dem Integrale des ersten Faktors:

$$\int_\theta^1 x^n\cdot\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = M\left(\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\right)\cdot\frac{1-\theta^{n+1}}{n+1}.$$

Von beiden Ausdrücken rechts erkennt man, dafs sie durch passende Wahl von n beliebig klein gemacht werden können. In dem ersten Integrale ist dabei die Giltigkeit des Mittelwertsatzes vorausgesetzt, auch für den Fall, dafs die unter dem Integrale nachbleibende Funktion an der Grenze unendlich wird, was unschwer zu beweisen ist.

Die obige Formel liefert demnach die Reihenentwickelung

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{m+1-p}\right),$$

und man hat also nach der Formel (9) der vorigen Nummer die Gleichung:

$$\pi \operatorname{cotg} p\pi = \frac{1}{p}-\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1+p}\right)-\left(\frac{1}{2-p}-\frac{1}{2+p}\right)-\left(\frac{1}{3-p}-\frac{1}{3+p}\right)-\cdots$$

Setzt man nach einander $p\pi = x$ und $= \frac{\pi}{2}-x$, so folgt:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x}-\left(\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\pi+x}\right)-\left(\frac{1}{2\pi-x}-\frac{1}{2\pi+x}\right)-\left(\frac{1}{3\pi-x}-\frac{1}{3\pi+x}\right)-\cdots$$

$$\operatorname{tang} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+x}\right)+\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x}-\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+x}\right)+\left(\frac{1}{\frac{5\pi}{2}-x}-\frac{1}{\frac{5\pi}{2}+x}\right)+\cdots$$

Da p zwischen 0 und 1 liegt, so setzt unsere Ableitung voraus, dafs in diesen Reihen x zwischen 0 und π, bezw. zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt; da aber die beiden Seiten dieser Gleichungen die Periode π besitzen, so gelten sie bei allen Werten von x, für welche die Nenner nicht verschwinden.

Da

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} x$$

ist, so folgt aus den beiden Reihen:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \left(\frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x}\right) - \cdots$$

und verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} - x$, so wird

$$\sec x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) + - \cdots$$

Diese letzten Gleichungen ergeben sich auch aus der Formel (8) in Nr. 478, denn diese kann leicht auf die Form gebracht werden:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1 + x}\, dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

481. Die Formel von Wallis. — In Nr. 477 wurde der Wert des Integrales

$$u_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx$$

bestimmt für den Fall, daſs m eine ganze positive, gerade oder ungerade Zahl ist. Dies Integral nimmt ab, wenn m wächst; denn die Elemente $\sin^m x\, dx$ sind um so gröſser, je kleiner m ist. Bezeichnet man also mit n eine ganze positive Zahl, so ist

$$u_{2n+1} < u_{2n} < u_{2n-1},$$

d. h.

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)},$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

Das Verhältnis der beiden rechten Seiten in diesen Ungleichungen ist gleich $\frac{2n}{2n+1}$, und hat die Einheit zur Grenze, wenn n unbegrenzt wächst; also ist

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}, \text{ für } n = \infty.$$

Diese bemerkenswerte Formel ist von Wallis noch vor der Entdeckung der Differentialrechnung aufgestellt worden; wir werden später Gelegenheit haben, sie zu benutzen.

§ 3. Differentiation und Integration der Integrale nach einem Parameter.

482. Differentiation eines Integrales überhaupt. Ein bestimmtes Integral

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

in welchem die Grenzen x_0 und X als variabel betrachtet werden, ist eine stetige Funktion dieser Grenzen. Die partiellen Differentialquotienten von u nach X und x_0 sind, wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist

$$\frac{\partial u}{\partial X} = f(X),$$

und weil

$$u = -\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = -f(x_0).$$

Betrachtet man also u als Funktion der beiden Variabeln X und x_0 allein, so ist

$$(1) \qquad du = f(X)\,dX - f(x_0)\,dx_0,$$

und diese Gleichung gilt sowohl für den Fall, daſs X und x_0 zwei unabhängige Variabele sind, als auch für den, daſs X und x_0 als Funktionen von einer oder von mehreren Variabelen betrachtet werden.

Enthält die Funktion $f(x)$ die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$, welche ebenfalls als Variabele anzusehen sind, so muſs man auf der rechten Seite der Gleichung (1) noch die partiellen Differentiale in Bezug auf diese Variabelen hinzufügen; es wird also:

$$(2) \qquad du = f(X)\,dX - f(x_0)\,dx_0 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta}\,d\beta + \cdots.$$

Wir müssen also noch zeigen, wie man diese partiellen Differentiale $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdots$ zu bilden hat, die so zu berechnen sind, dafs dabei x_0 und X als unabhängig von den Variabelen $\alpha, \beta, \ldots$ angenommen werden. Vorauszusetzen ist, dafs $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}, \ldots$ in der Umgebung der betrachteten Stelle $(X, x_0, \alpha, \beta, \ldots)$ stetig sind.

483. Satz über die Differentiation nach einem Parameter. Wir betrachten das Integral

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

und nehmen an, dafs die Funktion $f(x)$ eine Zahl α enthält, die als variabel betrachtet wird. Es ist dann u eine Funktion dieser Variabelen, und wir stellen uns die Aufgabe, die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ zu berechnen. Nach dem Vorangegangenen hat man die Grenzen x_0 und X als unabhängig von α anzunehmen

Um die Variabele α zur Evidenz zu bringen, bezeichnen wir die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $\frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}$ mit $f(x, \alpha)$ und $f'_\alpha(x, \alpha)$. Erteilt man α das Inkrement $\Delta \alpha$ und bezeichnet man die entsprechende Änderung von u mit Δu, so ist

$$\Delta u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha + \Delta \alpha)\, dx - \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)]\, dx$$

Wir wollen nun annehmen, dafs die Funktion $f'_\alpha(x, \alpha)$ in der Umgebung der Stelle (x, α) eine stetige Funktion des Variabelenpaares (x, α) ist; dabei soll x irgend eine Zahl in dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ und α den gerade fixierten Wert des Parameters bedeuten. Alsdann ist:

$$f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha) = \Delta \alpha \cdot f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta \alpha);$$

θ ist eine Zahl zwischen 0 und 1, die im Allgemeinen auch von x abhängig ist. Man erhält demnach unter dieser Voraussetzung:

$$\frac{\Delta u}{\Delta \alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta \alpha)\, dx.$$

Da nun f'_α stetig ist an jeder Stelle $(x, \alpha + \theta\Delta\alpha)$ des Intervalles, so ist für hinreichend kleine $\Delta\alpha$:

$$| f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, \alpha) | < \sigma$$

oder:

$$-\sigma < f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, \alpha) < \sigma.$$

Hieraus folgt aber durch Integration nach x:

$$-\sigma \cdot (X - x_0) < \frac{\Delta u}{\Delta\alpha} - \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx < \sigma \cdot (X - x_0).$$

Es wird also

$$\left| \frac{\Delta u}{\Delta\alpha} - \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx \right| < \sigma \cdot (X - x_0)$$

mit $\Delta\alpha$ beliebig klein. Also wird für $\Delta\alpha = 0$, $\lim \frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \frac{\partial u}{\partial\alpha}$ und

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Hieraus folgt der Satz:

Ist die Funktion $f'_\alpha(x, \alpha)$ für jede Stelle x des Intervalles $x_0 \leqq x \leqq X$ und für den gerade fixierten Wert α des Parameters eine stetige Funktion des Variabelenpaares (x, α), so wird:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\, dx.$$

Dabei sind x_0 und X als von α unabhängige Zahlen vorausgesetzt.

484. Satz über die Integration nach einem Parameter. Das in den beiden ersten Kapiteln angewandte Übertragungsprinzip, durch das wir jede Differentiationsregel in eine Integrationsregel verwandeln können, gestattet uns den letzten Satz in eine Regel zu verwandeln, nach der man das Integral

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$$

in der Weise nach α integrieren darf, daſs man den Integranden nach α integriert.

Wir setzen zunächst

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha = F(x, \alpha).$$

Die untere Grenze α_0 sei irgend eine feste Zahl; ferner sei

$$\int_{x_0}^{X} F(x, \alpha)\, dx = v.$$

Nach der vorigen Nummer ist nun, wenn

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} = f(x, \alpha)$$

in dem Integrationsgebiete von x_0 bis X und für das betreffende α eine stetige Funktion des Variabelenpaares (x, α) ist:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx,$$

also:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = u,$$

und da v für $\alpha = \alpha_0$ verschwindet, so ist

$$v = \int_{\alpha_0}^{\alpha} u\, d\alpha,$$

d. h.:

$$\int_{x_0}^{X} \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha \right] dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx \right] d\alpha.$$

Durch diese Gleichung ist der folgende Satz bewiesen:

Um das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$ *nach dem Parameter* α *zu integrieren zwischen den Grenzen* α_0 *und* α, *kann man zuerst die Funktion unter dem Integralzeichen zwischen diesen Grenzen nach* α *integrieren und sodann die Integration nach* x *ausführen, wenn* $f(x, \alpha)$ *im Integrationsgebiete von* α_0 *bis* α *und* x_0 *bis* X *eine stetige Funktion des Variabelenpaares* (x, α) *ist.*

Man kann denselben Satz auch in der Form aussprechen:

Hat man die Funktion

$$f(x, \alpha)$$

zwischen den Grenzen x_0 *und* X, α_0 *und* α *zu integrieren, so kann man die beiden Integrationen in beliebiger Reihenfolge ausführen, falls die Grenzen der beiden Variabelen von einander*

unabhängig sind, und die Funktion $f(x, \alpha)$ *im Integrationsgebiete die oben genannten Bedingungen erfüllt.*

Es wird sich später eine geometrische Interpretation dieses Satzes ergeben.

485. Ausdehnung der erhaltenen Sätze auf den Fall, dafs die Grenzen des Integrales unendlich sind. Wir werden in Nr. 497 erkennen, dafs man jedes Integral in ein anderes transformieren kann, in welchem die Grenzen beliebig vorgeschriebene Werte haben, indem man für x eine linear gebrochene Funktion der neuen Veränderlichen t einführt. Wir erhalten so eine Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} F(t)\,dt, \tag{1}$$

in welcher x_0 und X die ursprünglichen, t_0 und T die neu vorgeschriebenen Grenzen bedeuten.

Der Zusammenhang zwischen x und t wird durch eine Gleichung der Form:

$$x = \frac{a + bt}{a' + b't} \tag{2}$$

gegeben, in der a, b, a', b' Konstante sind. Diese Transformation behält auch dann noch ihre Geltung, wenn bei einem Integral eine der Grenzen oder beide unendlich grofs werden, wie in Nr. 497 ausgeführt ist. Diese Bemerkung giebt uns die Möglichkeit, die Sätze über die Differentiation und Integration nach einem Parameter auch auf den Fall zu übertragen, dafs eine der Grenzen oder beide unendlich werden. Um die Ideen zu fixieren, betrachten wir das Integral:

$$u = \int_{x_0}^{\infty} f(x, \alpha)\,dx \tag{3}$$

und fragen, wie man dieses nach dem Parameter α zu differentiieren hat. Vorausgesetzt ist dabei, dafs x_0 von α unabhängig ist. Eine Substitution (2) führt das Integral (3) über in:

$$u = \int_{t_0}^{T} F(t, \alpha)\,dt,$$

wo t_0 und T feste endliche Werte sein mögen. Es besteht also die Gleichung

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x, \alpha)\,dx = \int_{t_0}^{T} F(t, \alpha)\,dt.$$

Nehmen wir nun an, daſs das Integral rechter Hand die Bedingungen der Differentiierbarkeit unter dem Integralzeichen erfüllt, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_0}^{T} F(t, \alpha)\,dt = \int_{t_0}^{T} \frac{\partial F(t, \alpha)}{d\alpha}\,dt.$$

Da aber vermöge (1):

$$f(x, \alpha)\,dx = F(t, \alpha)\,dt$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial F(t, \alpha)}{\partial \alpha}\,dt = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx$$

und also auch durch Integration:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{T} \frac{\partial F(t, \alpha)}{\partial \alpha}\,dt = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx.$$

Ganz ebenso gestaltet sich die Untersuchung bei der Integration nach α, oder wenn die untere oder beide Grenzen des Integrales unendlich sind. Wir erkennen also:

Um zu prüfen, inwieweit die Regeln vom Differentiieren und Integrieren eines Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx$ nach einem Parameter α auch dann noch anwendbar sind, wenn eine der Grenze x_0 oder X oder beide unendlich sind, beachte man zunächst, daſs, wenn beide Grenzen ∞ sind, man das Integral als Summe zweier anderer schreiben kann, wo nur eine Grenze unendlich ist. Ist aber nur eine der beiden Grenzen unendlich, so transformiere man das Integral nach Nr. 497 mit Hilfe einer Substitution der Form:

$$x = \frac{a + bt}{a' + b't}$$

in ein anderes

$$\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{t_0}^{T} F(t, \alpha)\, dt$$

mit endlichen Grenzen t_0 und T. Läßt sich das Integral rechter Hand nach dem Parameter differentiieren oder integrieren, so gilt das Gleiche von dem ursprünglich gegebenen Integrale.

§ 4. Anwendung der Regeln des vorigen Paragraphen auf die Berechnung bestimmter Integrale.

486. Die Integrale $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$ **und** $\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{n-1}\, dx$. Man überzeugt sich leicht, daß für die folgenden Beispiele die Forderungen des vorigen Paragraphen erfüllt sind. Wir beginnen mit:

1. Es ist nach Nr. 477, wenn $\alpha > 0$ ist:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

Differentiiert man n-mal nach α, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(x^2+\alpha)^{n+1}}\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2\alpha^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{1}$$

2. Nach Nr. 477 ist bei positivem α

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha},$$

und differentiiert man $n-1$ mal nach α, so folgt:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{n-1}\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{\alpha^n}. \tag{2}$$

Setzt man $\alpha = 1$, so erhält man die Gleichung:

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = (n-1)!$$

487. Die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \cos bx\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx.$$

Multipliziert man die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$$

beiderseits mit $d\alpha$ und integriert man von $\alpha = b$ bis $\alpha = a$, so wird

$$\int_b^a d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \int_b^a \frac{d\alpha}{\alpha} = \log\frac{a}{b}; \qquad (a \text{ und } b > 0)$$

vertauscht man auf der linken Seite die Reihenfolge der Integrationen und beachtet, daſs

$$\int_b^a e^{-\alpha x}\, d\alpha = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}$$

ist, so gewinnt man die Gleichung:

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\, dx = \log\frac{a}{b}.$$

Setzt man $b = 1$, so wird

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\, dx = \log a.$$

In Nr. 477 wurde gefunden für $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Integriert man beide Seiten nach a zwischen den Grenzen f und g, die beide positiv sein müssen, so folgt:

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{g^2 + b^2}{f^2 + b^2},$$

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arc\,tang} \frac{g}{b} - \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{b}.$$

Nimmt man in der Gleichung (7) b als positiv an und läßt zunächst f nach 0 konvergieren, so läßt sich beweisen, daß die linke Seite stetig in den Wert

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx$$

übergeht. Es folgt dies ohne Schwierigkeit aus der Erkenntnis (Nr. 471), daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \qquad (z = bx)$$

einen endlichen Wert hat. Demnach ist:

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arc\,tang} \frac{g}{b}.$$

In diesem Integrale kann man g positiv unendlich werden lassen, da beide Seiten stetig nach bestimmten Grenzen konvergieren, und sonach wird:

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (b > 0)$$

Es ist einleuchtend, daß, falls b negativ ist, der Wert des Integrales gleich $-\frac{\pi}{2}$ wird.

488. Berechnung von $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\, dx$. Die vorstehende Formel (8) ist von sehr großer Bedeutung und kommt

bei schwierigen Untersuchungen zur Anwendung. Ersetzt man b durch $a+b$, und ferner durch $a-b$, wobei a und b beide positiv und $a>b$ angenommen werden, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Integrale findet man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx = 0.$$

Diese beiden gehen durch Vertauschung der Buchstaben a und b aus einander hervor. Also ist

$$(9) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $a>b$ oder $a<b$ ist; beide Zahlen sind dabei als positiv vorausgesetzt. Für $a=b$ wird das Integral gleich

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}\,dx,$$

also gemäfs der Gleichung (8) gleich $\frac{1}{2}$.

Wir haben also das Beispiel einer analytisch dargestellten Funktion der beiden Variabelen a und b, welche unstetig ist. Der Wert dieser Funktion ist, abgesehen vom Falle $a=b$, immer gleich 1 oder gleich 0, wenn a und b positiv sind.

Wir wollen nun eine Anwendung dieser Formel geben, welche zur Bestimmung eines neuen Integrales führt.

489. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2}$. Wir gehen aus von der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

und multiplizieren beide Seiten mit $\frac{\cos b}{b}\,db$. Es wird

$$\frac{\cos b}{b}\,db\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}.$$

Indem wir nun nach b integrieren von $b=0$ bis $b=\infty$, und dabei auf der linken Seite zuerst die Integration nach b ausführen, was gestattet ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\int_0^\infty \frac{\sin bx\cos b\,db}{b} = \int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}.$$

Das Integral nach x kann in zwei Teile zerlegt werden; der erste Teil besteht aus dem Integrale von $x=0$ bis $x=1$, der andere aus dem Integrale von $x=1$ bis $x=\infty$. Solange aber $x<1$ ist, wird der Faktor

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\cos b\,db}{x} = 0$$

gemäfs der Gleichung (9) in Nr. 488; und derselbe Faktor ist gleich $\frac{\pi}{2}$, wenn $x>1$ ist. Die obige Formel wird also

$$\frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2},$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2} = \frac{\pi}{2a}e^{-a}.$$

Die Konstante a ist positiv. Setzt man also $b=ax$, $db=a\,dx$, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a} \tag{10}$$

und dies ist die Gleichung, welche wir ableiten wollten.

490. Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$. Wir wollen noch das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ betrachten, welches zu der Klasse von Integralen gehört, deren Theorie im folgenden Kapitel gegeben werden wird. Der Wert desselben läfst sich leicht be-

stimmen, indem man die Methode der Integration unter dem Integralzeichen anwendet. Wir setzen

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Substituiert man $x = \alpha t$, $dx = \alpha\, dt$, wobei α eine Konstante ist, so folgt

$$A = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t^2}\, \alpha\, dt.$$

Multipliziert man mit $2e^{-\alpha^2} d\alpha$ beide Seiten, so wird:

$$A\, 2e^{-\alpha^2} d\alpha = 4e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t^2}\, \alpha\, dt.$$

Integriert man nun nach α, zwischen den Grenzen 0 und ∞, so wird die linke Seite gleich

$$A\, 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = A^2.$$

Auf der rechten Seite kann man die Integration nach α zuerst ausführen; es ist:

$$4\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t^2}\, \alpha\, dt = 4\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2(1+t^2)}\, \alpha\, d\alpha,$$

und da das unbestimmte Integral des Differentiales

$$2\, e^{-\alpha^2(1+t^2)}\, \alpha\, d\alpha = -\frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{1+t^2} + \text{const}$$

ist, so ist das Ergebnis dieser Integration

$$2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Also ist

$$A^2 = \pi$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{11}$$

491. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx$. Von dem letzten Integrale ausgehend gelangt man zu anderen, die hier noch angegeben werden sollen. Bezeichnet a eine positive Zahl und ersetzt man x durch $x\sqrt{a}$, so folgt:

$$(12)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}. \qquad (a > 0)$$

Differentiiert man diese Gleichung n-mal nach a, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\,a^{-(n+\frac{1}{2})},$$

und für $a = 1$:

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}.$$

Bezeichnet man mit a eine reelle positive oder negative Zahl und ersetzt man in der Gleichung (11) x durch $x \pm a$, so bleiben die Grenzen der Integration ungeändert und es wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \mp 2xa}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{a^2}.$$

Ersetzt man das zweideutige Zeichen auf der linken Seite einmal durch $+$, sodann durch $-$, und bildet alsdann die halbe Summe der Integrale, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\frac{e^{2ax}+e^{-2ax}}{2}\,dx = \sqrt{\pi}\cdot e^{a^2}.$$

Verwandelt man dann noch x in mx und a in $\frac{n}{m}$, so wird:

$$(14)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2}\,\frac{e^{2nx}+e^{-2nx}}{2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\,e^{\frac{n^2}{m^2}},$$

eine Gleichung, bei welcher m als positiv vorausgesetzt ist.

§ 5. Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe.

492. Die Integrale

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx.$$

Die bestimmten Integrale

$$(1) \qquad \int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx, \quad \int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx$$

haben alle beide den Wert null, wenn m und n ungleiche ganze Zahlen sind. Denn bildet man ihre Summe und ihre Differenz, so erhält man:

$$(2) \qquad \int_0^\pi dx \cos(m-n)x, \quad \int_0^\pi dx \cos(m+n)x,$$

und man erkennt ohne weiteres, daſs diese Integrale null sind, weil $\cos(m-n)x$ und $\cos(m+n)x$ die Ableitungen der Funktionen

$$\frac{\sin(m-n)x}{m-n} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(m+n)x}{m+n}$$

sind, welche für $x=0$ und $x=\pi$ verschwinden.

Ist aber $m=n$, so wird nur das zweite der Integrale (2) gleich null, während das erste sich auf $\int_0^\pi dx = \pi$ reduziert. Also haben die beiden Integrale

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx$$

den Wert 1 oder 0, je nachdem die ganzen Zahlen m und n gleich oder ungleich sind. Dieser Schluſs setzt indessen voraus, daſs nicht gleichzeitig $m=n=0$ ist; in diesem Falle wird das erste der Integrale (3) gleich 2 und das zweite null.

493. Die Fouriersche Reihe für gerade und ungerade Funktionen. Es seien nun $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen von x; von diesen beiden Funktionen sei bekannt, daſs sie in konvergente Reihen der folgenden Art entwickelbar seien:

(4) $f(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots$

(5) $F(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots,$

d. h. innerhalb des Intervalles von $x = 0$ bis $x = \pi$ konvergiere die erste Reihe und ebenso die zweite allenthalben und ihre Werte seien bezüglich gleich $f(x)$ und $F(x)$. Die erste Reihe wird dann für das Intervall von 0 bis $-\pi$ denselben Wert wie für das Intervall von 0 bis $+\pi$ darstellen; die zweite wird in jenem Intervalle Werte enthalten, die den anderen entgegengesetzt gleich sind. Aufserdem ist zu beachten, dafs die zweite Reihe für $x = 0$ und $x = \pi$ denselben Wert, nämlich null liefert, so dafs wir also, wenn völlige Übereinstimmung zwischen der Funktion $F(x)$ und der Sinusreihe bestehen soll, was wir zunächst voraussetzen, annehmen müssen, dafs diese Funktion insbesondere die Eigenschaft hat, dafs $F(0) = F(+\pi) = 0$ ist.

Es sollen nun die Koeffizienten in den beiden Reihen bestimmt werden. Der alte von Fourier eingeschlagene Weg ist der folgende.

Multipliziert man die Gleichung (4) mit $\frac{2}{\pi} \cos nx\,dx$ und integriert alsdann von 0 bis π, so werden alle Glieder auf der rechten Seite null, mit Ausnahme des mit A_n multiplizierten, welches den Wert erhält:

(6) $$\frac{2}{\pi} A_n \int_0^\pi \cos nx \cos nx\,dx = A_n.$$

Es ist demnach

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\,dx = A_n.$$

Diese Gleichung besteht auch für $n = 0$, d. h. es ist

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,dx = A_0.$$

Multipliziert man ebenso die Gleichung (5) mit $\frac{2}{\pi} \sin nx\,dx$ und integriert alsdann von 0 bis π, so werden alle Glieder wiederum gleich null mit Ausnahme des einen, welches den Wert erhält

$$\frac{2}{\pi} B_n \int_0^\pi \sin nx \sin nx \, dx = B_n.$$

Es ist also:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \sin nx \, dx = B_n. \tag{7}$$

494. Die allgemeine Fouriersche Reihe. Die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ haben die besondere Eigenschaft, dafs die erste eine *gerade*, die andere eine *ungerade* sein mufs; sie bilden also nur einen besonderen Fall von periodischen Funktionen. Bezeichnet man allgemein mit $F(x)$ eine Funktion, von der bekannt ist, dafs sie sich in eine konvergente trigonometrische Reihe entwickeln läfst, so hat diese Entwickelung die Form:

$$(8) \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots \\ \qquad + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots \end{cases}$$

Dabei ist zu bemerken, dafs diese Reihe für $x = 0$ bis $x = 2\pi$ verschiedene Werte darstellt und zwar im Intervalle von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$ denselben Wert wie im Intervalle von $x = -\pi$ bis $x = 0$, dafs sie also eine periodische Funktion ist mit der Periode 2π; ferner, dafs sie für $x = 0$ denselben Wert annimmt, wie für $x = 2\pi$, so dafs wir also wiederum, wenn völlige Übereinstimmung bestehen soll, von der Funktion $F(x)$ voraussetzen müssen, dafs $F(0) = F(2\pi)$ und allgemein $F(x \pm 2\pi) = F(x)$ ist.

Gehen wir nun zur Bestimmung der Koeffizienten in derselben Weise vor, so erkennen wir wiederum, dafs die Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

gleich 1 oder gleich null sind, je nachdem die ganzen Zahlen m und n gleich oder ungleich sind. Ist $n = m = 0$, so wird das erste Integral gleich 2 und das andere null. Auch sieht man, dafs das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx$$

immer null ist. Multipliziert man also die Gleichung (8) mit $\frac{1}{\pi}\cos nx\,dx$ und ebenso mit $\frac{1}{\pi}\sin nx\,dx$, und integriert man dann jedesmal von $x = 0$ bis $x = 2\pi$, so folgt:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx, \tag{9}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx, \tag{10}$$

und die Gleichung (9) gilt auch für $n = 0$; sie ergiebt in diesem Falle den doppelten Wert A_0 des von x unabhängigen Koeffizienten in der Entwickelung der Funktion $F(x)$.

Anmerkung. Man kann auch in die Reihenentwickelung anstatt der trigonometrischen Funktionen die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument einführen. Alsdann kann die Gleichung (8) geschrieben werden:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{nxi}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

wobei A_n eine komplexe Zahl ist. Multipliziert man dann beide Seiten mit $\frac{1}{2\pi}e^{-mxi}$ und integriert von 0 bis 2π, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,e^{-mxi}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(n-m)xi}\,dx.$$

Das Integral $\int_0^{2\pi} e^{(n-m)xi}\,dx$ ist gleich 2π, für $n = m$, aber gleich null, sobald m und n verschieden sind; folglich ist

$$A_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,e^{-mxi}\,dx,$$

und in dieser Gleichung kann m alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Die einfache Methode, wie hier die Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe bestimmt sind, durch welche eine

Funktion $F(x)$ definiert ist, beruht auf zweierlei Voraussetzungen. Wir nahmen an, erstlich, daſs von der Funktion $F(x)$ bekannt ist, daſs sie sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln läſst, zweitens, daſs diese trigonometrische Reihe die gliedweise Integration gestattet, was der Fall ist, wenn sie gleichmäſsig konvergiert. Nur unter diesen Beschränkungen ist der Satz bewiesen, dem man auch die Form geben kann:

In jeder trigonometrischen Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

welche im Intervalle von 0 *bis* 2π *eine stetige Funktion* $F(x)$ *definiert und zugleich gleichmäſsig konvergiert, haben die Koeffizienten* A_k *und* B_k *die Werte:*

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos kx\, dx, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin kx\, dx.$$

Zumal die zweite Voraussetzung beeinträchtigt die allgemeine Anwendbarkeit dieses Satzes, und das eigentliche Problem, um welches es sich bei der Einführung der trigonometrischen Reihe handelt, ob nämlich jede im Intervalle von 0 bis 2π irgendwie definierte Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, wird hiermit keineswegs beantwortet. Ein kurzer Abriſs der Theorie dieser Reihe ist daher am Schlusse dieses Buches gegeben.

§ 6. Die Transformation der Integrationsveränderlichen.

495. Problemstellung. Es sei das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ gegeben. Will man für x eine andere Variabele t einführen, so daſs

$$x = \varphi(t),$$

und setzt man:

$$F(t) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t),$$

so wird (Nr. 418):

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \int_{t_0}^{t} F(t)\, dt,$$

wenn man mit t_0 den Wert bezeichnet, welcher zum Werte $x = x_0$ gehört. Wenn man nun weiter $x = X$ einführt und man nennt T den Wert, welcher zu $x = X$ gehört, so folgt:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} F(t)\,dt. \tag{1}$$

Diese Gleichung erfordert aber einige Vorbedingungen, wenn sie nicht zu falschen Resultaten führen soll. Wenn nämlich die Funktion $\varphi(t)$ nicht so beschaffen ist, daſs in dem fraglichen Intervalle jedem Wert von t nur ein Wert von x entspricht, so kann es eintreten, daſs man, um eine stetige Reihe von Werten x zu erhalten, die von x_0 bis X gehen, nach einander verschiedene Bestimmungen der Funktion $\varphi(t)$ anwenden muſs. In diesem Falle muſs man also einsehen, wie die verschiedenen Transformationen der Variabelen nach einander auszuführen sind.

496. Beispiel. Ein sehr einfaches Beispiel wird das Gesagte deutlich machen. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}},$$

wobei X positiv ist. Dasselbe kann auf ein elliptisches Integral zurückgeführt werden vermittelst der Substitution:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}},$$

woraus folgt:

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}\left(1 \pm \sqrt{1-t^3}\right), \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \pm 2t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^3},$$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \pm \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Will man, daſs x und t zugleich null werden, so hat man für sehr kleine Werte von t

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \sqrt{1-t^3}\right)$$

zu wählen. Wächst hier die Variabele t von 0 bis 1, so wächst auch x von 0 bis 1. Soll aber die Variabele x Werte annehmen, die gröſser sind als 1, so muſs man

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{1 - t^3})$$

setzen. Läßt man hier t von 1 bis 0 variieren, so wächst x von 1 bis ∞.

Es sei nun T der Wert von t, welcher zu $x = X$ gehört. Ist $X < 1$, so ist auch T kleiner als 1, und man erhält:

$$(1) \qquad \int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}}.$$

Ist aber $X > 1$, so wird

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_1^T \frac{dt}{-\sqrt{t - t^4}}.$$

Man kann die Grenzen des zweiten Integrales vertauschen, wenn man das Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt; es wird also dieses Integral gleich

$$\int_T^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}} - \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}},$$

und also erhält man für den Fall $X > 1$:

$$(2) \qquad \int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}}.$$

Diese Gleichung ist, wie man sieht, sehr verschieden von der Gleichung (1), die sich auf den Fall $X < 1$ bezieht. Für $X = 1$ geben beide Gleichungen übereinstimmend:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}}.$$

497. Transformation der Grenzen. Es gilt der

Satz: Jedes bestimmte Integral $\int_x^X f(x)\,dx$ *kann durch eine lineare Substitution:*

$$(1) \qquad x = \frac{a + bt}{a' + b't}$$

in ein anderes $\int_{t_0}^T F(t)\,dt$ *verwandelt werden, dessen Grenzen* t_0

und T zwei willkürlich gewählte Zahlen sind, von denen auch eine unendlich sein kann.

Ist das vorgelegte Integral $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, wobei x_0 und X endliche Zahlen sind, und setzt man

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{t-t_0}{T-t_0}, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{X-x_0}=\frac{dt}{T-t_0},$$

wobei t eine neue Variabele, t_0 und T irgend welche Zahlen bedeuten, so wird $t=t_0$ für $x=x_0$ und $t=T$ für $x=X$. Folglich ergiebt diese Substitution, die offenbar die Gestalt (1) hat, ein Resultat von der Form:

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\int\limits_{t_0}^{T} F(t)\,dt.$$

Wendet man dagegen die ebenfalls lineare Substitution an

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{t-t_0}{t-t_0+1},$$

so wird $t=t_0$ für $x=x_0$ und $t=+\infty$ für $x=X$; also wird

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\int\limits_{t_0}^{\infty} F(t)\,dt,$$

und nimmt man $t_0=0$, so ist

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{\infty} F(t)\,dt;$$

es ist einleuchtend, daſs die umgekehrte Substitution das Integral $\int\limits_{0}^{\infty} F(t)\,dt$ auf die Form $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ bringt. Vertauscht man t mit $-t$, so werden die Grenzen $-\infty$ und 0, und demnach kann man thatsächlich t_0 und T irgend 2 Zahlen gleich machen, von denen eine unendlich sein kann.

498. Verwandlung eines unbestimmten Integrales in ein bestimmtes. Wir haben gesehen, daſs ein unbestimmtes Integral in der Weise eines bestimmten dargestellt werden kann, indem man die untere Grenze, mit welcher die Integration beginnen soll, willkürlich fixiert. Auf Grund der vorigen Überlegung

kann man nun noch hinzufügen, daſs ein unbestimmtes Integral auf unendlich viele Weisen durch ein bestimmtes ausgedrückt werden kann, dessen Grenzen sich ganz willkürlich fixieren lassen. Denn ist das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$, so ist:

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Bezeichnet man die Variabele unter dem Integrale mit α, so ist

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha + C;$$

$\int\limits_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha$ ist das bestimmte Integral des Differentiales $f(\alpha)\,d\alpha$, gebildet zwischen den Grenzen x_0 und x. Auf dieses kann man nun die Transformationen anwenden, von denen im vorigen Paragraphen gehandelt wurde.

Betrachten wir z. B. das unbestimmte Integral

$$\int x^{n-1}\,e^{-x}\,dx,$$

wobei wir den Exponenten n als positiv annehmen. Dieses Integral ist gleich

$$\int\limits_0^x x^{n-1}\,e^{-x}\,dx + C \quad \text{oder} \quad \int\limits_0^x \alpha^{n-1}\,e^{-\alpha}\,d\alpha + C.$$

Setzt man

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x\,dt,$$

so geht dasselbe über in

$$\int\limits_0^1 x^n\,t^{n-1}\,e^{-tx}\,dt + C,$$

oder wenn man den Faktor x^n aus dem Integralzeichen heraushebt, in

$$x^n \int\limits_0^1 t^{n-1}\,e^{-tx}\,dt + C.$$

Das elliptische Integral erster Gattung z. B.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}}$$

wird, wenn man wiederum

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x\,dt$$

setzt, gleich

$$x\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}.$$

Viertes Kapitel.

Theorie der Eulerschen Integrale.

---

§ 1. Definition und Eigenschaften der Eulerschen Integrale.

499. Die Eulerschen Integrale erster und zweiter Gattung. Mit dem Namen „Eulersche Integrale“ hat Legendre die beiden bestimmten Integrale:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

bezeichnet, welche zuerst von Euler untersucht und seitdem von vielen Mathematikern weiter erforscht worden sind. Die Theorie dieser Integrale ist von grundlegender Bedeutung, ihre Entwickelung soll uns in diesem Kapitel beschäftigen, das eine Ergänzung des vorigen bilden wird.

Das erste Integral hängt von zwei Parametern p und q ab; wir werden es mit $B(p, q)$ bezeichnen. Das zweite hängt nur von dem einen Parameter p ab; wir werden es mit Legendre durch das Symbol $\Gamma(p)$ darstellen. Es ist also

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{1}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx; \tag{2}$$

e bezeichnet hier wie gewöhnlich die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Die Funktionen $B(p, q)$ heifsen die **Eulerschen** Integrale erster Gattung, die Funktionen $\Gamma(p)$ die Integrale zweiter Gattung. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs diese Funktionen endlich bleiben, ist die, dafs die Parameter p und q positiv sind, oder dafs ihre reellen Bestandteile positiv sind, falls die Parameter komplexe Werte haben. In diesem Falle hat man $e^{pl x}$ an Stelle von x^p zu setzen, und analog bei den anderen Faktoren.

Den Integralen B läfst sich noch eine andere Form geben. Setzt man

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

in die Gleichung (1), so mufs das Integral in Bezug auf y zwischen 0 und ∞ genommen werden; schreibt man schliefslich wieder x statt y, so wird

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx, \tag{3}$$

oder auch

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx + \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx.$$

Ersetzt man in dem zweiten Integrale x durch $\frac{1}{x}$, dx durch $-\frac{dx}{x^2}$, so werden die Grenzen 1 und 0. Indem man das Vorzeichen des Integrales ändert, kann man dieselben vertauschen, und man erhält

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx,$$

oder

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx. \tag{4}$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Funktion $B(p, q)$ symmetrisch in Bezug auf die beiden Argumente p und q ist, so dafs also

$$B(p, q) = B(q, p)$$

ist. Diese Eigenschaft läfst sich übrigens auch aus der Gleichung (1) erkennen; denn wenn man daselbst x in $1 - x$ verwandelt, so wird direkt $B(p, q)$ in $B(q, p)$ transformiert.

500. Reduktion der Integrale erster Gattung auf die der zweiten. Wir wollen nun zeigen, dafs sich die Funktionen $B(p, q)$ durch die Funktionen $\Gamma(p)$ ausdrücken lassen, so dafs man sich blofs mit diesen letzteren zu beschäftigen hat.

Bezeichnet man mit m eine positive Konstante und setzt in der Gleichung (2) der Nr. 499 $x = mx'$, so wird

$$\Gamma(p) = m^p \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1}\, dx', \tag{1}$$

oder

$$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1}\, dx'.$$

Diese Gleichung, von welcher man in der Analysis öfters Gebrauch zu machen hat, dient uns zur Lösung der Aufgabe, die wir im Auge haben. Denn nach dieser Formel ist

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1}\, dx',$$

und also läfst sich die Gleichung (3) der Nr. 499 folgendermafsen schreiben:

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{p-1}\, dx \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1}\, dx'.$$

Die Reihenfolge der Integrationen kann vertauscht werden, und also wird

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{p+q-1}\, dx' \int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1} dx.$$

Nach Gleichung (1) ist aber $\int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1}\, dx$ gleich $\frac{1}{x'^p}\Gamma(p)$; demnach wird

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1}\, dx' = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{2}$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Nunmehr gehen wir zur Untersuchung der wesentlichsten Eigenschaften der Funktionen zweiter Gattung über.

501. $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$. — Integriert man das Differential $x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx$ teilweise, so folgt:

$$\int x^{p-1} e^{-x}\,dx = -x^{p-1} e^{-x} + (p-1)\int e^{-x} x^{p-2}\,dx.$$

Ist $p > 1$, so verschwindet das erste Glied der rechten Seite an den Grenzen 0 und ∞, und man erhält

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx = (p-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{p-2}\,dx,$$

d. h.

$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1). \tag{1}$$

Diese Gleichung drückt die erste Eigenschaft der Funktionen Γ aus. Man folgert aus derselben unmittelbar, indem man mit m eine ganze Zahl kleiner als p bezeichnet:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-m)\,\Gamma(p-m), \tag{2}$$

und hieraus folgt: Ist der Wert der Funktion Γ bekannt für alle Werte des *Argumentes* p zwischen 0 und 1, oder allgemeiner zwischen zwei positiven ganzen auf einander folgenden Zahlen, so ist diese Funktion auch bekannt für alle anderen reellen positiven Werte des Argumentes.

Ist p eine ganze Zahl und setzt man $m = p - 1$ in der Gleichung (2), so folgt:

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)\,\Gamma(1).$$

Da aber das Integral $\int e^{-x}\,dx$ gleich $-e^{-x} + C$ ist so wird:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \Gamma(1) = 1, \tag{3}$$

also

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) = (p-1)! \tag{4}$$

Ist also p eine ganze Zahl größer als 1, so reduziert sich $\Gamma(p)$ auf das Produkt der $p-1$ ersten ganzen Zahlen, d. h. auf $p-1$ Fakultät, ein Resultat, das schon in Nr. 486 erhalten wurde.

502. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$. — Die Eigenschaft, welche wir nun nachweisen wollen, gestattet das Zahlenintervall der Einheit, welches nach dem vorigen Satze für die Berechnung der Funktion Γ ausreicht, auf das Intervall $\frac{1}{2}$ zu reduzieren. Sie liefert z. B. die Werte der Funktion, welche zu den Werten $\frac{1}{2}$ bis 1 des Argumentes gehören, sobald man die Funktion für die Werte zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ kennt.

Setzt man in der Gleichung (2) der Nr. 500 $q = 1 - p$, indem man hier p als eine Zahl zwischen 0 und 1 annimmt, so wird, weil $\Gamma(1) = 1$ ist:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p),$$

und also nach der Gleichung (3) der Nr. 499:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}.$$

Wir wissen aber (Nr. 478), daſs dieses Integral den Wert $\frac{\pi}{\sin p\pi}$ hat; folglich ist

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{1}$$

Diese Gleichung stellt die zweite Eigenschaft der Funktion Γ dar. Nimmt man im Besonderen $p = \frac{1}{2}$ an, so liefert sie

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

also

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\,dx. \tag{2}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nicht von der in Nr. 490 erhaltenen. Denn setzt man in dem Integrale x^2 an Stelle von x, so wird

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

503. $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$. — Nimmt man in der Gleichung (1) der Nr. 499 $q=p$ an, so wird

(1) $$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx.$$

Man sieht, daſs die zu integrierende Funktion dieselben Werte bekommt, wenn x die Werte $\frac{1}{2}+h$ und $\frac{1}{2}-h$ erhält; hieraus folgt, daſs man das Integral von 0 bis $\frac{1}{2}$ bilden kann, wenn man den Wert desselben verdoppelt, so daſs also

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

ist. Setzt man nun $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$, $dx=-\frac{1}{4}\frac{dy}{\sqrt{y}}$, so werden die Grenzen des Integrales in Bezug auf y, 1 und 0; vertauscht man sie, indem man das Vorzeichen ändert, so wird

$$B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{p-1}dy,$$

d. h.

(2) $$B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right).$$

Ersetzt man B durch seine Werte in Γ nach der Gleichung (2) der Nr. 500 und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ durch den Wert $\sqrt{\pi}$, so folgt:

(3) $$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

Diese Gleichung drückt die dritte Eigenschaft der Funktionen Γ aus; sie ist in einer anderen viel allgemeineren enthalten, welche wir später entwickeln werden.

§ 2. Die Funktion $l\,\Gamma(x)$.

504. Darstellung von $l\,\Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral. Differentiiert man die Gleichung

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy$$

und bezeichnet man mit $\Gamma'(x)$ die Ableitung von $\Gamma(x)$, so folgt

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} ly\, dy.$$

Die Gleichung (1) der Nr. 500 ergiebt, wenn man $p = 1$ setzt:

$$\frac{1}{y} = \int_0^\infty e^{-yz} dz,$$

und wenn man diese Gleichung mit dy multipliziert und alsdann zwischen den Grenzen 1 und y integriert, so wird, wie wir schon in Nr. 487 sahen:

$$ly = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-yz}}{z} dz.$$

Führt man diesen Wert von ly in den obigen Ausdruck für $\Gamma'(x)$ ein, so erhält man:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-yz}}{z} dz.$$

Man kann die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und schreiben:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy - \int_0^\infty e^{-(1+z)y} y^{x-1} dy \right].$$

Das erste der in der Klammer enthaltenen Integrale ist $\Gamma(x)$; das zweite hat (Nr. 500) den Wert $\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x}$; also ist

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x) \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x} \right] \frac{dz}{z},$$

oder, indem man mit $\Gamma(x)$ dividiert:

$$(1) \qquad \frac{d\, l\, \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty [e^{-z} - (1+z)^{-x}] \frac{dz}{z}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dx und integriert sie alsdann zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt, weil $l\Gamma(1) = l1 = 0$ ist:

$$(2)\quad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{l(1+z)}\right]\frac{dz}{z}$$

Diesen Ausdruck für $l\Gamma(x)$ kann man folgendermaſsen vereinfachen. Setzt man $x=2$, so wird, da $l\Gamma(2)=l1=0$ ist:

$$(3)\quad 0 = \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{z(1+z)^{-2}}{l(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

Multipliziert man nun diese Gleichung mit $x-1$ und subtrahiert sie alsdann von der Gleichung (2), so folgt:

$$(4)\quad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{z}\right]\frac{dz}{l(1+z)}.$$

Setzt man hier $l(1+z) = y$, $z = e^y - 1$, so ist das Integral nach y ebenfalls zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu bilden, und man erhält schlieſslich

$$(5)\quad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-y} - \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{1-e^{-y}}\right]\frac{dy}{y}.$$

Auf Grund der früher gemachten Vorbemerkungen hat man sich zu überzeugen, daſs in der That die bei der Herleitung dieses Integrales angewandten Rechnungsoperationen statthaft sind.

505. Entwickelung von $l\Gamma(x)$ in eine Reihe von Logarithmen. Differentiiert man die zuletzt erhaltene Gleichung nach x, so folgt:

$$(1)\quad \frac{d\,l\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-yx}}{1-e^{-y}}\right)dy,$$

und durch wiederholte Differentiation:

$$\frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{ye^{-xy}}{1-e^{-y}}\,dy.$$

Ersetzen wir hier den Faktor $\frac{1}{1-e^{-y}}$ durch seinen Wert

$$1+e^{-y}+e^{-2y}+e^{-3y}+\cdots+e^{-(n-1)y}+\frac{e^{-ny}}{1-e^{-y}},$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2}=\int_0^\infty e^{-xy}y\,dy+\int_0^\infty e^{-(x+1)y}y\,dy+\cdots+$$

$$+\int_0^\infty e^{-(x+n-1)y}y\,dy+\int_0^\infty \frac{e^{-(x+n)y}y}{1-e^{-y}}dy.$$

Indem man jedes Glied vermittelst der Gleichung (1) der Nr. 500 auswertet, und von dem Restgliede, durch zweckmäſsige Anwendung des Mittelwertsatzes auf das in die Teile von 0 bis 1 und 1 bis ∞ zerlegte Integral, nachweist, daſs es mit beliebig wachsenden Werten von n beliebig klein wird, erhält man die Entwickelung:

$$(2)\qquad \frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\cdots,$$

welche für jeden positiven Wert von x gilt.

Integriert man diese in jedem endlichen, $x=0$ nicht enthaltenden Intervalle gleichmäſsig konvergente Reihe zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt:

$$(3)\quad \frac{dl\Gamma(x)}{dx}=-C+\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots,$$

und diese Reihe konvergiert wie die, aus deren Integration sie hervorgegangen ist, für alle positiven Werte von x. Die Konstante $-C$ ist gleich dem Werte, welchen die Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ für $x=1$ annimmt, und also ist zufolge der Gleichung (1):

$$(4)\qquad C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-y}}-\frac{1}{y}\right)e^{-y}dy.$$

Diese Gröſse heiſst die *Eulersche Konstante*; wir werden gleich sehen, auf welche Weise man ihren Wert berechnen kann. Integriert man die Gleichung (3) nochmals zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt, weil $l\Gamma 1=0$ ist:

$$(5)\begin{cases} l\Gamma(x) = -C(x-1) + \left(\frac{x-1}{1} - l\frac{x}{1}\right) + \left(\frac{x-1}{2} - l\frac{x+1}{2}\right) + \cdots \\ \qquad + \left(\frac{x-1}{m} - l\frac{x+m-1}{m}\right) + \cdots \end{cases}$$

Man kann diese Gleichung auch leicht von der Konstante C befreien. Denn setzt man hier $x = 2$, so wird:

$$(6)\quad 0 = -C + \left(\frac{1}{1} - l\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - l\frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - l\frac{m+1}{m}\right) + \cdots,$$

und subtrahiert man von der Gleichung (5) diese, nachdem man sie mit $x - 1$ multipliziert hat, so erhält man:

$$(7)\begin{cases} l\Gamma(x) = \left[(x-1)l\frac{2}{1} - l\frac{x}{1}\right] + \left[(x-1)l\frac{3}{2} - l\frac{x+1}{2}\right] + \cdots \\ \qquad + \left[(x-1)l\frac{m+1}{m} - l\frac{x+m-1}{m}\right] + \cdots, \end{cases}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$(8)\qquad l\Gamma(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(x-1)\,l\left(1+\frac{1}{m}\right) - l\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].$$

Wir wollen mit $l(1+\varepsilon_m)$ die Summe der Glieder bezeichnen, welche in den Gleichungen (7) und (8) auf das m^{te} folgen. Da die Reihe konvergent ist, so wird ε_m für $m = \infty$ zu null; man hat also

$$l\Gamma(x) = \left[(x-1)l\frac{2}{1} - l\frac{x}{1}\right] + \cdots + \left[(x-1)l\frac{m+1}{m} - l\frac{x+m-1}{m}\right] + l(1+\varepsilon_m),$$

oder, wenn man vom Logarithmus zum Numerus übergeht:

$$\Gamma(x) = \frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}(1+\varepsilon_m);$$

da der Faktor $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}$ für $m = \infty$ die Grenze 1 hat, so kann man ihn mit $(1+\varepsilon_m)$ vereinigen und also schreiben:

$$(9)\qquad \Gamma(x) = \frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

d. h. es ist:

$$(10)\qquad \Gamma(x) = \lim_{m=\infty}\frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}.$$

Wir bemerken noch, daſs die Gleichung (6) für die Eulersche Konstante die Darstellung giebt:

$$(11)\quad C = \lim\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - l\,m\right] \text{ für } m = \infty.$$

506. Entwickelung von $l\Gamma(1+x)$ in eine Potenzreihe. Setzt man in der Gleichung (2) der vorigen Nummer für x den Wert $x+1$, so erhält man:

$$(1)\qquad \frac{d^2 l\Gamma(1+x)}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \cdots,$$

und differentiiert man $n-2$-mal, so wird:

$$(2)\qquad \frac{1}{n!}\,\frac{d^n l\Gamma(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \cdots\right].$$

Setzen wir nun allgemein:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots,$$

so ist für $x=0$:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n l\Gamma(1+x)}{dx^n}\right]_{x=0} = (-1)^n \frac{S_n}{n},$$

falls $n>1$ ist; ferner hat man

$$\left[\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}\right]_{x=0} = -C, \quad l\Gamma 1 = 0.$$

Die Formel von Mac-Laurin giebt also für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$:

$$(3)\qquad l\Gamma(1+x) = -Cx + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} - \cdots;$$

denn man überzeugt sich leicht, daſs das Restglied der Entwickelung bei diesen Werten von x nach null konvergiert. Diese Gleichung ist für eine numerische Rechnung noch nicht bequem, weil die Summen S_n nicht rasch abnehmen, aber man kann leicht besser konvergente Reihen bilden. Addiert man zu der erhaltenen die Reihe:

$$0 = -l(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

so folgt:

$$(4)\quad l\Gamma(1+x) = -l(1+x) + (1-C)x + \tfrac{1}{2}(S_2-1)x^2 - \tfrac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \cdots$$

Die Glieder dieser Reihe nehmen rasch genug ab, man kann aber die Konvergenz noch verstärken. Setzt man für x den Wert $-x$, so wird

$$(5)\quad l\Gamma(1-x) = -l(1-x) - (1-C)x + \tfrac{1}{2}(S_2-1)x^2 + \tfrac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \cdots$$

Nun ist

$$\Gamma(1+x) = x\,\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

multipliziert man diese Gleichungen, so wird

$$\Gamma(1+x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x},$$

also

$$l\Gamma(1+x) + l\Gamma(1-x) = l\,\frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Addiert man diese Gleichung zur Gleichung (4), subtrahiert alsdann die Gleichung (5) und dividiert das Resultat mit 2, so folgt $(-1 < x \leqq +1)$:

$$(6)\quad l\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\,l\,\frac{\pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x} + (1-C)x - (S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - \cdots$$

Nach den oben bewiesenen Eigenschaften ist die Funktion Γ für alle positiven Werte des Argumentes bekannt, sobald man diese Funktion für die Werte zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{2}$ und 1, 1 und $1+\frac{1}{2}$ etc. kennt. Die Gleichung (6) läßt nun $l\Gamma(1+x)$ für alle Werte von x zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ sehr rasch berechnen. In seinem *Traité des fonctions elliptiques* hat Legendre die Werte von S_n von $n = 2$ bis $n = 35$ auf 16 Dezimalstellen gegeben.

Nimmt man in der Gleichung (6) $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ an, was $l\Gamma(2) = 0$ und $l\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = l\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$ liefert, so erhält man zwei Gleichungen, welche zur Berechnung der Konstante C dienen können. Man findet, indem man beachtet, daſs $l\,\frac{\pi x}{\sin \pi x} + l\,(1-x) = 0$ wird für $x = 1$:

$$1 - C = \frac{1}{2}\,l\,2 + \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \frac{1}{5}(S_5 - 1) + \frac{1}{7}(S_7 - 1) + \cdots,$$

$$1 - C = l\,\frac{3}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4}(S_3 - 1) + \frac{1}{5 \cdot 16}(S_5 - 1) + \frac{1}{7 \cdot 64}(S_7 - 1) + \cdots$$

Es genügen vier Summen S, um C auf 15 Dezimalstellen zu erhalten; man findet so:

$$(7)\qquad C = 0{,}57721\,56649\,01532\,8.$$

Wir werden später ein noch rascheres Verfahren zur Berechnung von C kennen lernen, welches überdies nicht die vorangehende Berechnung der Summen S erfordert.

507. Berechnung von $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ für rationale Werte von x. Die Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ läſst sich in geschlossener Form durch eine endliche Anzahl von Gliedern allemal dann ausdrücken, wenn x eine rationale Zahl ist. Addiert man nämlich die beiden Gleichungen (1) und (4) in Nr. 505, so folgt

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-yx}}{1 - e^{-y}}\, dy,$$

oder, wenn man $e^{-y} = z$ setzt:

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}\, dz. \tag{1}$$

Ist nun $x = \frac{m}{n}$, wobei m und n ganze Zahlen sind, und setzt man $z = y^n$, so erhält man:

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = -C + n\int_0^1 \frac{y^{n-1} - y^{m-1}}{1 - y^n}\, dy, \quad \left(\text{für } x = \frac{m}{n}\right).$$

Hier ist die zu integrierende Funktion eine rationale, und folglich läſst sich das Integral durch algebraische, logarithmische oder cyklometrische Ausdrücke darstellen. Man erhält z. B. für $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = -C - 2\int_0^1 \frac{dy}{1+y} = -C - l\,4.$$

Reduziert sich x auf eine ganze Zahl, so giebt die Gleichung (1):

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 (1 + z + z^2 + \cdots + z^{x-2})\, dz,$$

also:

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1}. \tag{2}$$

Die in dieser Gleichung enthaltene Summe ist unter dem Namen der *harmonischen Reihe* bekannt.

508. Das Minimum von $\Gamma(x)$. Die Gleichung (2) der Nr. 505 zeigt, daſs die Funktion $\frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2}$ positiv ist für alle Werte der Variabelen x, welche als reell und positiv angenommen ist; folglich ist die Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ oder $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ eine beständig wachsende. Ferner erkennt man aus der Gleichung (3) derselben Nummer, daſs diese Funktion gleich $-\infty$ wird für $x=0$ und gleich $+\infty$ für $x=+\infty$. Hieraus folgt, daſs die Funktion $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ nur ein einziges Mal null wird, daſs also die Funktion $l\Gamma(x)$ und folglich auch die Funktion $\Gamma(x)$ nur ein einziges Minimum hat. Dieses Minimum tritt für einen Wert von x zwischen 1 und 2 ein, weil $\Gamma(2)=\Gamma(1)$ ist.

Wird x null, so wird die Funktion

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\frac{1}{x}$$

unendlich. Wächst x bis $+\infty$, so nimmt $\Gamma(x)$ solange ab, bis es seinen Minimalwert erreicht hat und wächst dann wieder bis $+\infty$.

Um den Wert von x zu erhalten, welcher zu dem Minimum der Funktion $\Gamma(1+x)$ gehört, hat man die eine positive Wurzel der Gleichung $\Gamma'(1+x)=0$ oder $\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}=0$ zu bestimmen. Aus der Formel (4) der Nr. 506 erhält man die Gleichung:

$$0=-\frac{1}{1+x}+(1-C)+(S_2-1)x-(S_3-1)x^2+\cdots$$

Man erkennt hieraus leicht, daſs die Wurzel zwischen 0,4 und 0,5 gelegen ist, und findet weiter durch bekannte Annäherungsmethoden:

$$1+x=1{,}4616321\ldots$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (4) oder (6) derselben Nummer, daſs für diesen Wert von x:

$$l\Gamma(1+x)=\bar{1}{,}9472392\ldots,$$

daſs also:

$$\Gamma(1+x)=0{,}8856032\ldots$$

das fragliche Minimum wird.

§ 3. Die Funktion $\Gamma(x)$, aufgefafst als unendliches Produkt.

509. Die Produktdarstellung von $\Gamma(x)$. Da

$$\Gamma(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1)$$

ist, wenn x eine ganze Zahl ist, so kann die Funktion $\Gamma(x)$ zur Interpolation der Reihe dienen, deren allgemeines Glied $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1)$ ist. Denn diese Formel drückt in der That dieses Produkt vermittelst einer stetigen Funktion von x aus, in welcher die Variabele alle komplexen Werte annehmen kann, deren reeller Bestandteil positiv ist. Die Gleichung (8) oder (10) der Nr. 505 liefert aber eine noch weit allgemeinere Art der Interpolation, denn sie läfst das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1)$ durch eine stetige Funktion von x darstellen, bei welcher die Variabele einen beliebigen reellen oder komplexen Wert annehmen kann; nur für den Wert $x = 0$, sowie für alle ganzen negativen Werte wird diese Funktion unendlich. Da dieses Resultat von grofser Wichtigkeit ist, so ist es nicht überflüssig, einzusehen, wie man durch ganz elementare Betrachtungen unmittelbar zu diesen Formeln gelangt, wenn man die numerische Funktion $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1)$ zu interpolieren sucht.

Es seien x und m zwei ganze positive Zahlen, so konvergieren die $x-1$ Brüche

$$\frac{m+1}{m}, \quad \frac{m+2}{m}, \ldots \quad \frac{m+x-1}{m}$$

nach dem Werte eins, wenn m unbegrenzt wächst und x konstant bleibt; dasselbe ist mit dem Produkte dieser $x-1$ Brüche der Fall, und man erhält:

$$\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+x-1)}{m^{x-1}} = 1 + \varepsilon_m,$$

wobei ε_m eine Zahl ist, welche für $m = \infty$ verschwindet. Denn es ist:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{x-1}{m}\right) < e^{\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\cdots+\frac{x-1}{m}} = e^{\frac{x(x-1)}{2m}},$$

weil

$$1+\frac{1}{m} < e^{\frac{1}{m}}, \quad 1+\frac{2}{m} < e^{\frac{2}{m}}, \ldots 1+\frac{x-1}{m} < e^{\frac{x-1}{m}}$$

ist. Folglich ist $\varepsilon_m < e^{\frac{x(x-1)}{2m}} - 1$, und wird mit unbegrenzt wachsenden Werten von m gleich null. Multipliziert man die beiden Seiten der obigen Gleichung mit $1 \cdot 2 \cdots m$, so erhält man vermittelst einfacher Umformung

$$1 = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m)\, m^{x-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+x-1)} (1+\varepsilon_m),$$

und wenn man weiter mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1)$ multipliziert:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1) = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m)\, m^{x-1}}{x(x+1) \cdots (m+x-1)} (1+\varepsilon_m),$$

oder

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1) = \lim \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m)\, m^{x-1}}{x(x+1) \cdots (m+x-1)} \quad (\text{für } m = \infty).$$

Dies ist genau die Gleichung (10) der Nr. 505 für den Fall eines ganzzahligen x, und ohne Schwierigkeit läfst sich hieraus die Gleichung (8) derselben Nummer ableiten.

Gauss hat in seinen Untersuchungen über diesen Gegenstand die Gleichung (10) als allgemeinen Ausdruck zur Definition der Funktion $\Gamma(x)$ gewählt, desgleichen ist Liouville (Journal de Mathém. 1. S. T. XVII), indem er denselben Ausgangspunkt annahm, zu mehreren interessanten Sätzen gelangt. Man erkennt aus der obigen Herleitung, dafs dieser Weg in der That ein naturgemäfser ist.*) Nach der Entwickelung, welche wir gegeben haben, ist die rechte Seite der Gleichung (8) in Nr. 505 eine Reihe, die konvergent ist bei allen positiven Werten von x, und folglich konvergiert auch unter derselben Annahme die rechte Seite der Gleichung (10) nach einer bestimmten Grenze. Um jedoch die neue Definition der Funktion Γ zu rechtfertigen, mufs man zeigen, dafs die Konvergenz auch bei allen komplexen Werten besteht.

Aus der Gleichung (10) erkennt man zunächst, dafs $\Gamma(x)$ unendlich ist, wenn x gleich null oder gleich einer beliebigen ganzen negativen Zahl ist. Wird dieser Fall bei Seite gelassen, so kann man behaupten, dafs die Reihe (8) im Übrigen immer

---

*) Die Integraltheorie der Gammafunktionen ist von Dirichlet (Crelle, Journal B. 15) wesentlich gefördert worden. Betreffs der reichhaltigen Litteratur für dieses Gebiet siehe Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Leipzig 1871.

konvergent ist. Das allgemeine Glied, in welchem m gröſser als der Betrag von $x-1$ angenommen wird, ist

$$(x-1)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\cdots\right)-\left[\frac{x-1}{m}-\frac{(x-1)^2}{2m^2}+\cdots\right],$$

oder

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2m^2}(1+\varepsilon_m);$$

ε_m bezeichnet eine Zahl, die mit unbegrenzt wachsendem m nach null konvergiert. Hieraus folgt, daſs von einer bestimmten Stelle an die Glieder der Reihe abnehmen wie die Glieder der Reihe $\sum\frac{1}{n^2}$. Diese Reihe ist aber konvergent, und folglich konvergiert auch die rechte Seite der behandelten Gleichung nach einer endlichen bestimmten Grenze.

510. Neuer Beweis der Gleichung $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Die Eigenschaften der Funktion Γ, welche oben bewiesen wurden, flieſsen unmittelbar auch aus der definierenden Gleichung:

$$\Gamma(x)=\lim\frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)} \quad \text{für } m=\infty.$$

Es ist zunächst:

$$\Gamma(x)=\frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

$$\Gamma(x+1)=\frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}(1+\varepsilon_m'),$$

also:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=x\,\frac{m}{x+m}\cdot\frac{1+\varepsilon_m'}{1+\varepsilon_m}.$$

Läſst man m unendlich werden, so folgt:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

und dies ist die erste Eigenschaft der Funktion Γ.

511. Neuer Beweis von $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$. Multipliziert man die beiden Gleichungen:

$$\Gamma(x)=\frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

$$\Gamma(1-x)=\frac{(1\cdot 2\cdots m)\,m^{-x}}{(1-x)(2-x)\cdots(m-x)}(1+\varepsilon_m'),$$

so folgt:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)(1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon_m')}{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)}.$$

Läßt man m unendlich werden, so reduziert sich der Zähler in diesem Quotienten auf den Wert eins und der Nenner auf den Wert $\frac{1}{\pi}\sin \pi x$ auf Grund der bekannten Formel:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Man erhält demnach:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

oder, wenn man mit x multipliziert:

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

512. Beweis der Gleichung

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-nx+\frac{1}{2}}\,\Gamma(nx).$$

Die dritte Eigenschaft der Funktion Γ ist in Nr. 503 nur für einen besonderen Fall bewiesen. Wir wollen sie hier in ihrer vollen Allgemeinheit ableiten.

Es sei x ein reeller oder komplexer Wert, n und h seien zwei ganze positive Zahlen. Ersetzt man x durch $x+\frac{h}{n}$, so wird:

$$\Gamma\left(x+\frac{h}{n}\right) = \frac{(1\cdot 2\cdots m)\, m^{x+\frac{h}{n}-1}}{\left(x+\frac{h}{n}\right)\left(x+\frac{h}{n}+1\right)\cdots\left(x+\frac{h}{n}+m-1\right)}(1+\varepsilon_m).$$

Giebt man nun h die n Werte $0, 1, 2, \ldots n-1$ und multipliziert alsdann die erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{(1\cdot 2\cdots m)^n \cdot m^{nx-\frac{n+1}{2}}\, n^{mn}}{nx\,(nx+1)\,(nx+2)\cdots(nx+nm-1)}\,(1+\varepsilon_m);$$

ε_m bezeichnet nach wie vor eine Zahl, die für $m=\infty$ null wird. Aber die definierende Gleichung für Γ ergiebt auch,

wenn man x durch nx ersetzt und für m den Wert mn schreibt:

$$\Gamma(nx) = \frac{(1 \cdot 2 \cdots mn)(mn)^{nx-1}}{nx(nx+1)\cdots(nx+nm-1)}(1+\varepsilon_m'),$$

und so erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-nx}\,\Gamma(nx)} = \frac{(1\cdot 2\cdots m)^n\, n^{mn+1}}{(1\cdot 2\cdots mn)\, m^{\frac{n-1}{2}}}(1+\varepsilon_m)$$

ε_m bezeichnet auch hier eine Zahl, welche für $m=\infty$ null wird. Die Grenze der rechten Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von n, welche unabhängig ist von x. Nennt man dieselbe $\varphi(n)$, so wird:

$$(1)\qquad \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = n^{-nx}\,\Gamma(nx)\,\varphi(n).$$

Die Funktion $\varphi(n)$ ist definiert durch die Gleichung:

$$\varphi(n) = \lim \frac{(1\cdot 2\cdots m)^n\, n^{mn+1}}{(1\cdot 2\cdots mn)\, m^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{für } m=\infty.$$

Setzt man

$$\psi(m) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{m^{m+\frac{1}{2}}},$$

so kann man schreiben:

$$\varphi(n) = \sqrt{n}\,\lim \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)} = \sqrt{n}\,A_n,$$

wobei

$$A_n = \lim \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}$$

ist, oder auch, wenn man m in $2m$ verwandelt:

$$A_n = \lim \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}.$$

Es ist aber:

$$A_n = \frac{A_n^2}{A_n} = \lim \frac{[\psi(m)]^{2n}}{[\psi(mn)]^2} : \lim \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}$$

$$= \lim \left[\frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}\right]^n : \lim \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}.$$

Die Ausdrücke $\lim \frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}$ und $\lim \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}$ sind gleich A_2; folglich wird:

$$A_n = A_2^{n-1} \quad \text{und} \quad \varphi(n) = \sqrt{n}\, A_2^{n-1}.$$

Die Konstante A_2 ist gleich:

$$A_2 = \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \lim \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m)^2\, 2^{2m+\frac{1}{2}}}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2m)\, m^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \sqrt{4 \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1}}.$$

Nach der Formel von **Wallis** (Nr. 481) hat der Ausdruck unter der Wurzel den Grenzwert $4\frac{\pi}{2} = 2\pi$; also ist

$$A_2 = \sqrt{2\pi},$$

folglich:

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

und

$$(2) \quad \Gamma(x)\, \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-nx+\frac{1}{2}}\, \Gamma(nx).$$

Diese Gleichung drückt die dritte Eigenschaft der Funktion Γ aus. Setzt man in ihr $n = 2$, so folgt:

$$\Gamma(x)\, \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{-2x+1}\, \Gamma(2x),$$

was mit dem in Nr. 503 gefundenen Resultate übereinstimmt.

Der Beweis, welchen wir hier für die Gleichung (2) gegeben haben, ist ein direkter und unabhängig von den anderen Eigenschaften der Funktion Γ. Um die Konstante A_2 zu bestimmen, kann man sich indessen auch mit Nutzen der Gleichung $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ bedienen. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{2}$ und $n = 2$ in der Gleichung (1), so erhält man

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\varphi(2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, A_2, \quad \text{also} \quad A_2 = \sqrt{2\pi}.$$

Endlich kann man auch die Funktion $\varphi(n)$ sehr einfach bestimmen, wie dies **Legendre** gethan hat, wenn man die zweite Eigenschaft der Funktion Γ benutzt. Setzt man nämlich $x = 0$

in der Gleichung (1), nachdem man zuvor $\Gamma(x)$ durch $\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ und $\Gamma(nx)$ durch $\frac{\Gamma(nx+1)}{nx}$ ersetzt hat, so folgt:

$$\frac{1}{n}\varphi(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

oder, wenn man die Reihenfolge der Faktoren rechts verändert:

$$\frac{1}{n}\varphi(n) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen und beachtet dabei, dafs $\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-h}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{h\pi}{n}}$ ist, so wird

$$[\varphi(n)]^2 = \frac{n^2\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Man weifs aber, dafs der Nenner dieses Quotienten gleich $\frac{n}{2^{n-1}}$ ist; folglich wird:

$$[\varphi(n)]^2 = n(2\pi)^{n-1} \quad \text{und} \quad \varphi(n) = \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

wie bereits oben gefunden ist.

Die Gleichung $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ beweist man nach Dirichlet folgendermafsen: Es stellt

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

die $n-1$ Wurzeln der Gleichung $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ dar, wenn man für k die Werte $1, 2, \ldots n-1$ substituiert. Demnach ist

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 = \prod_{k=1}^{k=n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right),$$

oder für $x = 1$:

$$n = \prod_{k=1}^{k=n-1}\left(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right) = \prod_{k=1}^{k=n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right),$$

also:

$$n = \frac{2^{n-1}}{i^{n-1}}\prod_{k=1}^{k=n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\,e^{+i\frac{k\pi}{n}}.$$

Da nun

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} e^{+i\frac{k\pi}{n}} = e^{+i\frac{\pi}{n}(1+2+\cdots+n-1)} = e^{+\frac{i\pi}{2}(n-1)} = (+i)^{n-1}$$

wird, so ist

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

§ 4. Anwendung der Eulerschen Integrale zur Berechnung einiger bestimmter Integrale.

513. Die Integrale $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \frac{\cos}{\sin} tx\,dx$. Bezeichnet m eine positive Zahl, so ist (Nr. 500)

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-mx} x^{p-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{m^p}.$$

Diese Gleichung gilt auch noch, wenn m einen komplexen Wert hat, dessen reeller Bestandteil positiv ist; jedoch bedarf diese Behauptung eines Beweises. Wir ersetzen m durch $a - it$ und bezeichnen mit R und Φ den Betrag und das Argument des Wertes, welchen dann das vorige Integral erhält. Es ist also

$$(2) \qquad Re^{i\Phi} = \int_0^\infty e^{-(a-it)x} x^{p-1}\,dx,$$

und man sieht, daſs dieser Ausdruck in der That einen endlichen Wert hat, wenn a positiv ist. Wir setzen

$$(3) \qquad t = a \operatorname{tang} \varphi,$$

wobei φ ein Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ ist. $R\cos\Phi$ und $R\sin\Phi$ werden stetige Funktionen von φ, welche bezüglich gleich sind dem reellen und dem mit i multiplizierten Bestandteile des Integrales. Um die Ableitungen dieser Funktionen zu erhalten, kann man die beiden Integralbestandteile unter dem Integralzeichen nach φ differentiieren; es ist aber einleuchtend, daſs man dasselbe Resultat in einfacherer Weise

erhält, wenn man die Differentiation an der Gleichung (2) ausführt. Man erhält sodann

$$(4)\qquad Re^{i\Phi}\left(\frac{d\log R}{d\varphi}+i\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)=\frac{ai}{\cos^2\varphi}\int\limits_0^\infty e^{-(a-it)x}x^p\,dx.$$

Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int e^{-(a-it)x}x^p\,dx=-\frac{e^{-(a-it)x}x^p}{a-it}+\frac{p}{a-it}\int e^{-(a-it)x}x^{p-1}\,dx,$$

und weil $a>0$ und $p>0$ ist, so wird

$$\int\limits_0^\infty e^{-(a-it)x}x^p\,dx=\frac{p\cos\varphi\, e^{i\varphi}}{a}Re^{i\Phi},$$

und demnach reduziert sich die Gleichung (4) auf

$$\frac{d\log R}{d\varphi}+i\frac{d\Phi}{d\varphi}=\frac{ipe^{i\varphi}}{\cos\varphi}.$$

Setzt man die reellen und ebenso die imaginären Teile auf beiden Seiten einander gleich, so folgt:

$$\frac{d\log R}{d\varphi}=-p\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\quad \frac{d\Phi}{d\varphi}=p,$$

also:

$$\log R=-p\int\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi=\log(\cos\varphi)^p+\text{const},$$

$$\Phi=p\varphi+\text{const}.$$

Ist aber t oder φ gleich null, so hat man $\Phi=0$, $R=\frac{\Gamma(p)}{a^p}$ also ist:

$$\Phi=p\varphi,\quad R=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi,$$

und folglich ergiebt die Gleichung (2):

$$(5)\qquad \int\limits_0^\infty e^{-(a-it)x}x^{p-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\, e^{ip\varphi},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(6)\qquad \int\limits_0^\infty e^{-(a-it)x}x^{p-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)}{(a-it)^p};$$

und dies stimmt mit der Gleichung (1) überein, wenn man daselbst $m = a - it$ setzt. Da aber der Ausdruck $(a - it)^p$ mehrere Werte annehmen kann, wenn p eine gebrochene Zahl ist, so mufs man beachten, dafs das Argument dieser Potenz erhalten wird, indem man das zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegene Argument der Zahl $a - it$ mit p multipliziert. Die Gleichung (6) zerlegt sich in die beiden folgenden:

$$(7)\quad \begin{cases} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \cos p\varphi = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin^p \varphi \cos p\varphi, \\ \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \sin tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \sin p\varphi = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin^p \varphi \sin p\varphi, \end{cases}$$

wobei die drei Zahlen a, t, φ durch die Relation

$$t = a \operatorname{tang} \varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right)$$

verbunden sind.

514. Die Werte von $\int_0^\infty x^{p-1} \frac{\cos}{\sin} tx\, dx$. Wir haben erkannt, dafs die Integrale, welche in den letzten Gleichungen vorkommen, endliche und bestimmte Werte haben, solange die Zahl a, wie wir auch angenommen haben, positiv ist. Dieses ist aber nicht mehr ohne weiteres einleuchtend, wenn a null ist, wenn also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird und t einen endlichen Wert behält. In diesem Falle gelten die Formeln (7) auch nur, falls p kleiner ist als 1. Um dieses zu beweisen, genügt es, das zweite der Integrale (7) zu betrachten; denn durch geeignete Transformation kann man alsdann die Untersuchung auch auf das erste übertragen. Die Zahl t werde als positiv angenommen, und es sei

$$\int_{\frac{m\pi}{t}}^{\frac{(m+1)\pi}{t}} x^{p-1} e^{-ax} \sin tx\, dx = (-1)^m u_m.$$

Macht man die Substitution $x = \frac{z + m\pi}{t}$, so wird

$$u_m = \frac{1}{t^p}\int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1} e^{-\frac{a}{t}(z+m\pi)} \sin z\, dz.$$

Nun sieht man leicht, dafs das in der zweiten der Gleichungen (7) berechnete Integral gleich ist der Summe der konvergenten Reihe:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots,$$

in welcher die Glieder alternierend positiv und negativ sind und dabei unbegrenzt nach null abnehmen, sobald $a > 0$ ist. Ist aber a gleich 0, so reduziert sich u_m auf den Ausdruck

$$U_m = \frac{1}{t^p}\int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1} \sin z\, dz,$$

und dieser wird nicht null für $m = \infty$, aufser wenn $p < 1$ ist. Unter dieser Annahme ist aber die Reihe

$$U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \cdots$$

konvergent, und man kann beweisen, dafs ihre Summe gleich ist dem Werte, welchen die vorige Reihe für $a = 0$ annimmt. Denn bezeichnen s und S die Summen dieser beiden Reihen, s_n und S_n die Summen, welche durch die n ersten Glieder jedesmal gebildet werden, r_n und R_n die entsprechenden Reste, so ist

$$S - s = (S_n - s_n) + (R_n - r_n).$$

Die Differenz $S_n - s_n$ wird gleichzeitig mit a zu null; die Reste R_n und r_n können unabhängig von a lediglich durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden; also wird auch $S - s$ für $a = 0$ ebenfalls zu null.

Demnach folgt aus den Gleichungen (7) für $a = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$(8) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \cos tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \cos\frac{p\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \sin tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin\frac{p\pi}{2}, \end{cases}$$

solange p zwischen 0 und 1 enthalten ist.

Ersetzt man $\Gamma(p)$ durch den Wert $\frac{\pi}{\Gamma(1-p)\sin p\pi}$, so wird

$$\int_0^\infty x^{p-1}\sin tx\,dx = \frac{\pi}{2t^p\,\Gamma(1-p)\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

Das Integral bleibt endlich für $p = 0$, und man erhält

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

wie schon in Nr. 487 gefunden wurde.

515. Das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$. Die vorigen Gleichungen lassen nun noch weiter eine grofse Anzahl von bestimmten Integralen berechnen; wir wollen einige Beispiele hierzu geben.

Wir bemerken zunächst, dafs die Gleichungen (8) nicht die Eulersche Gleichung voraussetzen, aus welcher wir die zweite Eigenschaft der Gammafunktionen abgeleitet haben; es ist im Gegenteil sehr leicht, diese Formel hier zu gewinnen. Denn multiplizieren wir die erste der Gleichungen (8) mit $\frac{dt}{1+t^2}$ und integrieren alsdann von $t = 0$ bis $t = \infty$, so kann die Integration auf der linken Seite unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, und es wird

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,dx \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt = \Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}\int_0^\infty \frac{t^{-p}\,dt}{1+t^2}.$$

Da x positiv ist, so ist das Integral $\int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ (Nr. 489); die linke Seite wird demnach $\frac{\pi}{2}\Gamma(p)$ und sonach erhält man:

$$2\int_0^\infty \frac{t^{-p}\,dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

Setzt man $t = x^{-\frac{1}{2}}$ und schreibt $2p-1$ an Stelle von p, so folgt:

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

was die in Nr. 478 bewiesene Gleichung ist. Unser jetziger Beweis setzt voraus, daſs p zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten ist, aber die gewonnene Gleichung gilt für alle Werte von p zwischen 0 und 1; denn das Integral bleibt ungeändert, wenn man x in $\frac{1}{x}$ und p in $1-p$ verwandelt.

516. Die Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \,{\cos \atop \sin}\, p\varphi\, d\varphi$.

Es sei q eine Zahl zwischen 0 und 1, und es werde $p > q$ angenommen. Multipliziert man die Gleichungen (7) mit

$$t^{q-1}\,dt = a^q \operatorname{tang}^{q-1}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

und integriert alsdann von $t=0$ bis $t=\infty$ oder von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so kann auf den linken Seiten wiederum die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden, und man erhält:

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\,dx \int_0^\infty t^{q-1}\cos tx\,dt = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\,dx \int_0^\infty t^{q-1}\sin tx\,dt = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi.$$

Nach den Gleichungen (8) haben die Integrale links in Bezug auf t die Werte:

$$\frac{\Gamma(q)}{x^q}\cos\frac{q\pi}{2}, \quad \frac{\Gamma(q)}{x^q}\sin\frac{q\pi}{2}.$$

Es werden demnach die linken Seiten gleich:

$$\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}\int_0^\infty x^{p-q-1}e^{-ax}\,dx,$$

$$\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}\int_0^\infty x^{p-q-1}e^{-ax}\,dx,$$

oder

$$\frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}},\quad \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}},$$

also ist:

$$(11)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\varphi\sin^{q-1}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)}\cos\frac{q\pi}{2},\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\varphi\sin^{q-1}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)}\sin\frac{q\pi}{2}.\end{cases}$$

Nimmt man $q = p - 1$ an, so wird $\Gamma(p-q) = 1$, $\Gamma(q) = \frac{\Gamma(p)}{p-1}$, also:

$$(12)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{1}{p-1}\sin\frac{p\pi}{2},\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{p-1}\cos\frac{p\pi}{2}.\end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist $p > 1$ vorausgesetzt.

In den Gleichungen (11) mufs $q < 1$ sein. Da aber beide Seiten stetige Funktionen von q sind, so gelten die Gleichungen auch noch für $q = 1$; also ist:

$$(13)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = 0,\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-2}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = \frac{1}{p-1}.\end{cases}$$

Diese Formeln setzen noch voraus, dafs $p > 1$ ist. Man kann aus ihnen die Gleichungen (12) ableiten, indem man φ in $\frac{\pi}{2} - \varphi$ verwandelt, und umgekehrt.

Ersetzt man $\Gamma(q)$ durch $\frac{\pi}{\sin q\pi\, \Gamma(1-q)}$ in der zweiten Gleichung (11) und läfst alsdann $q = 0$ werden, so folgt:

$$(14) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

In dieser Gleichung mufs p positiv sein; das Integral aber hat einen konstanten, von p unabhängigen Wert.

517. $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx$ **und verwandte Integrale.** Wie wir in Nr. 513 sahen, besteht die Gleichung

$$\frac{1}{(1-ix)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z(1-ix)}\, dz,$$

multipliziert man dieselbe mit der Funktion $\frac{e^{aix}}{(1+ix)^n}$, wobei a positiv ist, so folgt:

$$\frac{e^{aix}}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z^{n-1} e^{-z} e^{(a+z)ix}}{(1+ix)^n}\, dz.$$

Multipliziert man ferner beide Seiten mit $x^{p-1}dx$ und integriert alsdann von $x = 0$ bis $x = \infty$, so kann die Reihenfolge der Integrationen auf der rechten Seite vertauscht werden, und man erhält:

$$(15) \int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{aix}}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\, dz \int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{(a+z)ix}}{(1+ix)^n}\, dx.$$

Ebenso ist

$$\frac{1}{(1+ix)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y(1+ix)}\, dy,$$

und multipliziert man mit $x^{p-1} e^{(a+z)ix} dx$, so wird:

$$\frac{x^{p-1} e^{(a+z)ix}\, dx}{(1+ix)^n} = \frac{dx}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} e^{(a+z-y)ix} x^{p-1}\, dy.$$

Durch Integration von $x = 0$ bis $x = \infty$ erhält man:

$$(16)\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{(a+z)ix}}{(1+ix)^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy \int_0^\infty x^{p-1} e^{(a+z-y)ix} dx.$$

Wir bezeichnen mit $\frac{G+iH}{\Gamma(n)}$ den Wert jedes Gliedes dieser Gleichung; dann erhält die Gleichung (15) die Form:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}(\cos ax + i \sin ax)}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)^2} \int_0^\infty (G+iH) z^{n-1} e^{-z} dz.$$

Setzt man die mit dem Faktor i behafteten Glieder auf beiden Seiten einander gleich und nimmt alsdann $p = 0$ an, so folgt:

$$(17)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)^2} \int_0^\infty H z^{n-1} e^{-z} dz.$$

Der Wert von H ist durch die Gleichung (16) gegeben; für $p = 0$ ist:

$$H = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy \int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x} dx.$$

Es ist aber $\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x} dx$ gleich $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ (Nr. 487), je nachdem y kleiner oder größer ist als $a+z$; also ist:

$$H = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{a+z} y^{n-1} e^{-y} dy - \int_{a+z}^\infty y^{n-1} e^{-y} dy\right].$$

Differentiiert man nach a, so wird:

$$\frac{dH}{da} = \pi(a+z)^{n-1} e^{-(a+z)}.$$

Differentiiert man auch die Gleichung (17) nach a, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)^2} \int_0^\infty \frac{dH}{da} z^{n-1} e^{-z} dz,$$

und man erhält also schließlich die Gleichung, welche wir ableiten wollten:

$$(18)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{\Gamma(n)^2}\int_0^\infty z^{n-1}(a+z)^{n-1}e^{-(a+2z)}\,dz,$$

wobei n irgend welche positive Zahl bedeutet. Ist n eine ganze Zahl, so wird

$$(19)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)}\sum_{h=0}^{h=n-1}\frac{\Gamma(2n-1-h)}{\Gamma(h+1)\,\Gamma(n-h)}(2a)^h$$

und für $n = 1$ erhält man wieder die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

welche schon in Nr. 489 gewonnen wurde. Für $n = 2$ wird

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1+a)\,e^{-a}.$$

518. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q\varphi \cos p\varphi \, d\varphi$ **und verwandte Integrale.** Die Gleichung (18) führt noch zu anderen bestimmten Integralen, welche einiges Interesse verdienen. Multipliziert man die erste der Gleichungen (7) nämlich

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\cos tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\cos p\varphi,$$

wobei $t = a\operatorname{tang}\varphi$ ist, mit

$$\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{a\,d\varphi}{\cos^2\varphi\,(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n},$$

und integriert alsdann von $t = 0$ bis $t = \infty$ oder von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, indem man dabei die Reihenfolge der Integrationen auf der linken Seite vertauscht, so wird:

$$(20)\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\,dx\int_0^\infty \frac{\cos tx}{(1+t^2)^n}\,dt = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}\,d\varphi.$$

Nach der Gleichung (18) hat das Integral in Bezug auf t den Wert:

$$\frac{\pi}{\Gamma(n)^2}\int_0^\infty z^{n-1}(x+z)^{n-1}e^{-(x+2z)}\,dz,$$

oder wenn man xy an Stelle von z, $x\,dy$ an Stelle von dz setzt:

$$\frac{\pi}{\Gamma(n)^2}\int_0^\infty y^{n-1}(1+y)^{n-1}e^{-x(1+2y)}x^{2n-1}\,dy.$$

Multipliziert man dieses Integral mit $x^{p-1}e^{-ax}\,dx$ und integriert alsdann von 0 bis ∞, so erhält man einen Wert, welcher der rechten Seite der Gleichung (20) gleich ist. Folglich ist:

$$\frac{\pi}{\Gamma(n)^2}\int_0^\infty y^{n-1}(1+y)^{n-1}\,dy\int_0^\infty x^{2n+p-2}e^{-(a+1+2y)x}\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}\,d\varphi.$$

Auf der linken Seite hat das Integral nach x den Wert:

$$\frac{\Gamma(2n+p-1)}{(a+1+2y)^{2n+p-1}},$$

also ist:

$$(21)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}\,d\varphi=\pi a^{p-1}\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)\Gamma(n)^2}\int_0^\infty\frac{y^{n-1}(1+y)^{n-1}\,dy}{(a+1+2y)^{2n+p-1}}.$$

Ist $a=1$, so reduziert sich das Integral rechts auf

$$\frac{1}{2^{2n+p-1}}\int_0^\infty\frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)^{n+p}}=\frac{1}{2^{2n+p-1}}\,\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)},$$

also ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p+2n-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2^{2n+p-1}}\,\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+p)},$$

oder wenn man $p+2n-2=q$ setzt:

$$(22)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{q+1}} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}.$$

Diese Gleichung wurde zuerst von Cauchy bewiesen. Für den Fall $q = p$ reduziert sie sich auf eine von Poisson gegebene Formel, nämlich:

$$(23)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}}.$$

Setzt man in der Gleichung (21) $n = 1$, so reduziert sich das Integral rechts auf

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(a+1+2y)^{p+1}} = \frac{1}{2p(a+1)^p},$$

also ist:

$$(24)\qquad \int_0^\pi \frac{\cos^p\varphi \cos p\varphi}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{a^{p-1}}{(a+1)^p},$$

und diese Gleichung geht für $a = 1$ in die Gleichung (23) über.

§ 5. Die Stirlingsche Reihe.

519. Vorbemerkung. Der Logarithmus des Produktes der x ersten ganzen Zahlen läſst sich durch eine Reihe ausdrücken, welche nach ganzen und negativen Potenzen von x fortschreitet. Diese berühmte Reihe ist die Stirlingsche, ihre Theorie ist von vielen Mathematikern weiter entwickelt worden, unter denen insbesondere Cauchy, Binet, Malmsten und Liouville zu nennen sind.*) Unter den verschiedenen Beweisen, die man für diese Formel aufgestellt hat, ist aber, wie mir scheint, keiner einfacher als der, welchen ich im Jahre 1860 der Akademie vorgelegt und in der vierten Ausgabe meines Cours d'Algèbre supérieure (deutsche Bearbeitung von Werthheim, Bd. 2 Kap. 4) wiedergegeben habe. Daselbst

*) Siehe auch Jacobi, Crelles Journal Bd. 12, sowie die weitere Litteratur bei Meyer, a. a. O. pag. 145.

habe ich bewiesen, daſs die bekannte Formel von Wallis vollständig zur Ableitung der Stirlingschen ausreicht, und diese Ableitung ist so einfach, daſs man die zweite Formel gewissermaſsen als eine Transformation der ersten ansehen kann. Diese Entwickelungen hängen zugleich wesentlich mit der Theorie der Eulerschen Integrale zusammen, und ich halte es daher für nützlich, sie auch hier darzulegen.

520. Asymptotischer Wert von x! Die Formel von Wallis ist (Nr. 481):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2x-2}{2x-3} \cdot \frac{2x-2}{2x-1} \cdot \frac{2x}{2x-1}, \quad (\text{für } x = \infty)$$

und sie erhält die einfache Form:

$$\frac{[\varphi(x)]^4}{[\varphi(2x)]^2} = 1, \qquad (\text{für } x = \infty)$$

oder indem man die Quadratwurzel auszieht:

$$(1) \qquad \frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)} = 1, \qquad (\text{für } x = \infty)$$

wenn man mit $\varphi(x)$ entweder den Ausdruck

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}},$$

oder das Produkt dieses Quotienten mit einer Exponentialfunktion von der Form a^x bezeichnet, wobei a eine beliebige positive Konstante ist. Die Gleichung (1) gilt also, wenn man, mit e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnend,

$$(2) \qquad \varphi(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x}{\sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}}}$$

setzt. Aus dieser Gleichung folgt:

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(x+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{x}\right)},$$

oder:

$$(4) \qquad l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = -1 + \left(x + \frac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Nun wird, da $x > 1$ ist:

$$l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{nx^n} + \cdots,$$

also:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}+\cdots+\frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{x^n}+\cdots,$$

mithin:

$$(5) \quad l\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}=\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}+\frac{3}{40x^4}-\cdots+\frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{x^n}+\cdots$$

In dieser Reihe sind die Glieder abwechselnd positiv und negativ; ferner ist der Betrag des Verhältnisses zwischen dem Gliede vom Range n und dem vorhergehenden:

$$\frac{n^2}{n^2+n-2}\frac{1}{x}.$$

Dieses Verhältnis ist gleich $\frac{1}{x}$ für $n=2$, und kleiner als $\frac{1}{x}$ für alle Werte von n, die gröfser sind als 2. Also nehmen, selbst wenn $x=1$ ist, die Beträge der Glieder in der Reihe (5) von der zweiten Stelle an ab, und folglich ist

$$l\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}<\frac{1}{12x^2},$$

oder

$$(6) \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}<e^{\frac{1}{12x^2}}.$$

Man kann aber auch noch eine andere Grenze für diesen Quotienten bestimmen, welche kleiner ist. Da wir dieselbe später benutzen werden, so ist es zweckmäfsig, sie hier anzugeben.

Multipliziert man die Gleichung (5) mit $x+1$, so folgt:

$$(x+1) l\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}=\frac{1}{12x}-\frac{1}{120x^3}+\cdots+\frac{n-3}{2(n-1)n(n+1)}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}+\cdots$$

In dieser Reihe fehlt das Glied $\frac{1}{x^2}$; die anderen sind abwechselnd positiv und negativ, und das Verhältnis des Gliedes $\frac{1}{x^n}$ zu $\frac{1}{x^{n-1}}$ hat den Betrag:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)+2(n-4)}\frac{1}{x}.$$

Dieses Verhältnis ist gleich $\frac{1}{x}$ für $n=4$, und kleiner als $\frac{1}{x}$ für $n>4$. Also nehmen die Glieder von der zweiten Stelle an ab, selbst wenn x gleich 1 wird, und man erhält:

$$(x+1)\, l\, \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x},$$

oder

$$(7)\qquad l\, \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x(x+1)}.$$

Die Gleichung (6) lehrt, dafs

$$(8)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\theta_0}{x^2}}$$

ist, wobei θ_0 eine positive Zahl kleiner als $\frac{1}{12}$ ist. Indem man x in $x+1$, $x+2, \ldots 2x-1$ verwandelt, und mit θ_1, $\theta_2, \ldots \theta_{x-1}$ Brüche zwischen 0 und $\frac{1}{12}$ bezeichnet, erhält man die Gleichungen:

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\theta_1}{(x+1)^2}} \\ \dfrac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\theta_2}{(x+2)^2}} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}}. \end{array}\right.$$

Multipliziert man dann die Gleichungen (8) und (9), so erhält man, weil die Summe der x Brüche

$$\frac{\theta_0}{x^2} + \frac{\theta_1}{(x+1)^2} + \cdots + \frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}$$

kleiner ist als $\frac{1}{12x^2} \cdot x = \frac{1}{12x}$:

$$(10)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta}{x}};$$

θ bezeichnet eine Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{12}$. Folglich ist:

$$(11)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1 \qquad (\text{für } x = \infty).$$

Dividiert man nun die Gleichung (1) durch diese Gleichung, so folgt:

$$(12)\qquad \varphi(x) = 1, \qquad (\text{für } x = \infty)$$

d. h. auf Grund der Gleichung (2):

$$(13)\qquad 1\,.\,2\,.\,3 \ldots x = \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_x);$$

ε_x bezeichnet eine positive Gröfse, die für $x = \infty$ verschwindet, und für welche wir nun eine obere Grenze bestimmen wollen.

521. Neue Reihenentwickelung von $l\,\Gamma(x+1)$ für ganze positive x. Es ist

$$(14)\qquad \Gamma(x+1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots x,$$

und aus den obigen Gleichungen läfst sich ein exakter Ausdruck für die Funktion $\Gamma(x+1)$, oder, was dasselbe ist, für den natürlichen Logarithmus dieser Funktion herleiten, wenn x eine ganze Zahl ist. Zunächst wird nämlich, gemäfs der Gleichung (2):

$$(15)\quad l\,\Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2}\, l\, 2\pi - x + \left(x + \tfrac{1}{2}\right) l x + l\,\varphi(x).$$

Nun besteht die Identität:

$$l\varphi(x) = l\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} + l\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} + \cdots + l\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} + l\varphi(x+m+1).$$

Wenn aber m unbegrenzt wächst, so konvergiert die Funktion $\varphi(x+m+1)$ nach dem Werte eins, nach Gleichung (12), und ihr Logarithmus konvergiert nach null. Also ist

$$(16)\qquad l\varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} l\,\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)},$$

oder nach der Gleichung (4):

$$(17)\quad l\,\varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\left(x + m + \tfrac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{x+m}\right) - 1\right].$$

Sonach wird

$$(18)\ l\Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2}\, l\,(2\pi) - x + \left(x + \tfrac{1}{2}\right) l x + \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\left(x+m+\tfrac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{x+m}\right) - 1\right].$$

Diese Gleichung, welche von Gudermann aufgestellt wurde, läfst sich, wie man sieht, aus der einfachen Formel von Wallis leicht ableiten.

522. Einengung von $x!$ zwischen zwei Grenzen. Da die Gröfse $l\varphi(x)$ positiv ist, so ergiebt die Gleichung (15) zunächst:

$$(19)\qquad l\Gamma(x+1) > \tfrac{1}{2}\, l\,(2\pi) - x + \left(x + \tfrac{1}{2}\right) l x.$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (16) auf Grund der Ungleichung (7):

$$l\varphi(x) < \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{12(x+m)(x+m+1)}.$$

Der Bruch $\frac{1}{(x+m)(x+m+1)}$ läfst sich aber in

$$\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+m+1}$$

zerlegen, also wird

$$12\,l\varphi(x) < \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots$$

Die Reihe rechts hat die Summe $\frac{1}{x}$, und folglich ist

$$l\varphi(x) < \frac{1}{12x};$$

ferner:

$$(20)\qquad l\Gamma(x+1) < \frac{1}{2}\,l(2\pi) - x + \left(x + \frac{1}{2}\right)lx + \frac{1}{12x}.$$

Die Gleichungen (19) und (20) geben uns die beiden gesuchten Grenzen. Geht man von dem Logarithmus zum Numerus über, so erhält man:

$$(21)\qquad \begin{cases} 1\cdot 2\cdot 3\cdots x > \sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}, \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdots x < \sqrt{2\pi}\,e^{-x+\frac{1}{12x}}\,x^{x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

523. Allgemeingültigkeit der Reihe in Nr. 521. In den bisherigen Untersuchungen ist angenommen, dafs x eine ganze positive Zahl ist. Die rechte Seite der Gleichung (18) ist jedoch eine Funktion, bei welcher x einen beliebigen Wert annehmen kann. Mit Ausnahme der Fälle, wo x eine ganze negative Zahl ist, ist nämlich diese Reihe immer konvergent, denn ihre Glieder nehmen, wie man leicht nachweisen kann, ebenso ab wie die Glieder der Reihe $\sum \frac{1}{m^2}$. Nun kann man beweisen, dafs diese Gleichung in der That bei allen Werten von x besteht, indem man auf die allgemeine Definition der Funktion Γ zurückgeht. Diese Definition ist in der Gleichung (8) der Nr. 505 enthalten; ersetzt man daselbst x durch $x+1$

und schreibt man unter dem Summenzeichen $m+1$ an Stelle von m, so erhält man:

$$l\Gamma(x+1)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[x\,l\left(1+\frac{1}{m+1}\right)-l\left(1+\frac{x}{m+1}\right)\right].$$

Um die Identität zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (18) zu erweisen, genügt es, dieselben zweimal zu differentiieren. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{d^2 l\Gamma(1+x)}{dx^2}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m+1)^2}.$$

Die rechten Seiten in den beiden Gleichungen haben demnach gleiche Ableitungen zweiter Ordnung. Da sie überdies ebenso wie ihre ersten und zweiten Ableitungen stetige Funktionen sind, so könnnen sie sich nur um eine lineare Funktion unterscheiden; und weil sie bei allen ganzen positiven Werten von x einander gleich sind, so folgt weiter, dafs ihre Differenz gleich null sein mufs.

524. Darstellung von $l\varphi(x)=l\dfrac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}\,e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}}$ als bestimmtes Integral. Die Funktion $l\varphi(x)$ läfst sich leicht durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Differentiiert man nämlich die Gleichung (17) der Nr. 521 zweimal nach einander, so findet man:

$$\frac{d\,l\varphi(x)}{dx}=\frac{1}{2x}+\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[l\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-\frac{1}{x+m}\right],$$

$$\frac{d^2 l\varphi(x)}{dx^2}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2}.$$

Nun ist für jeden positiven Wert von z:

$$\frac{1}{z}=\int_0^\infty e^{-yz}dy,\quad \frac{1}{z^2}=\int_0^\infty e^{-yz}y\,dy.$$

Wenn also die Variabele x positiv bleibt, so ist:

$$\frac{d^2 l\varphi(x)}{dx^2}=-\int_0^\infty e^{-yx}\left(1+\frac{y}{2}\right)dy+\int_0^\infty e^{-yx}\sum_{m=0}^{m=\infty}e^{-my}\,y\,dy,$$

und da die Gröfse $\sum\limits_{m=0}^{m=\infty} e^{-my}$ gleich $\frac{1}{1-e^{-y}}$ ist, so erhält man:

$$\frac{d^2 l\varphi(x)}{dx^2} = \int\limits_0^\infty e^{-yx}\left(\frac{y}{1-e^{-y}} - \frac{y}{2} - 1\right) dy.$$

Integriert man diesen Ausdruck zweimal und beachtet dabei, dafs die Funktionen $l\varphi(x)$ und $\frac{dl\varphi(x)}{dx}$ für $x = \infty$ verschwinden, so folgt:

$$(1) \qquad l\varphi(x) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right) e^{-yx} dy.$$

Trägt man diesen Wert in die Gleichung (15) der Nr. 521 ein, so erhält man einen Ausdruck für $l\Gamma(x+1)$, welcher von Cauchy gegeben ist.

525. Potenzreihe für $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)$. Hieraus kann man nun die Stirlingsche Gleichung ableiten; jedoch mufs man noch zuvor die Gleichung (1) transformieren. Die Gleichung

$$\Gamma(1+x) + \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

giebt:

$$l\Gamma(1+x) + l\Gamma(1-x) = l(\pi x) - l \sin \pi x,$$

und indem man differentiiert:

$$(2) \quad \frac{dl\Gamma(1+x)}{dx} + \frac{dl\Gamma(1-x)}{dx} = \frac{1}{x} - \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \pi i \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}.$$

Andererseits ist nach der Gleichung (18) in Nr. 521:

$$\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right) + \cdots,$$

und wenn man x in $-x$ verwandelt:

$$-\frac{dl\Gamma(1-x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-x}\right) + \cdots$$

Trägt man also diese Werte in die Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{2^2-x^2} + \frac{2x}{3^2-x^2} + \cdots = \frac{1}{x} - i\pi \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}.$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Darstellung von $\operatorname{cotg} \pi x$ durch eine unendliche Reihe von Partialbrüchen, die wir schon in Nr. 480 bewiesen haben. Wir hätten sie also hier von vornherein zur Grundlage der weiteren Entwickelungen wählen können, doch ist es, abgesehen davon, dafs sie hier für alle reellen und komplexen Werte von x bewiesen ist, nicht ohne Interesse, sie mit den Gleichungen zu verknüpfen, welche wir in unserer Theorie der Gammafunktionen aufgestellt haben.

Setzt man $x = \frac{i\alpha}{2\pi}$, so wird die obige Gleichung:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2}, \tag{3}$$

und man erhält durch Division:

$$\frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2} = \frac{1}{(2m\pi)^2} - \frac{\alpha^2}{(2m\pi)^4} + \cdots \pm \frac{\alpha^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}} \mp \theta_m \frac{\alpha^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}};$$

θ_m' bezeichnet der Kürze halber die Gröfse $\frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2 + \alpha^2}$, deren Wert zwischen 0 und 1 liegt. Wir geben nun m die Werte $1, 2, 3 \ldots$ bis unendlich, addieren dann alle Gleichungen und bemerken, dafs wenn man

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \theta_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}} = \theta \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}$$

setzt, θ ebenfalls zwischen 0 und 1 enthalten ist. Alsdann wird nach Gleichung (3):

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^2} - 2\alpha^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^4} + \cdots$$
$$\pm 2\alpha^{2n-2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n}} \mp 2\theta\alpha^{2n} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

und setzt man:

$$\frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\right), \tag{4}$$

so folgt:

$$(5)\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_1}{1\cdot 2}-\frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1\cdot 2\cdots 2n}\alpha^{2n-2}\\ \qquad +(-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{1\cdot 2\cdots(2n+2)}\alpha^{2n};\end{cases}$$

θ ist eine Gröſse zwischen 0 und 1.

Dies bemerkenswerte Resultat ist von Cauchy gegeben worden. Die Funktion von α, welche die linke Seite der Gleichung bildet, wird ebenso wie ihre Ableitung nur unendlich und unstetig für die Werte von α, welche in der Formel $\alpha = 2k\pi i$ enthalten sind; wobei k eine ganze positive oder negative von 0 verschiedene Zahl bedeutet. Hieraus folgt, daſs diese Funktion gemäſs der Mac-Laurinschen Formel in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar ist, für alle reellen oder komplexen Werte von α, deren Modul kleiner ist als 2π, so daſs also bei diesen Werten die Gleichung besteht:

$$(6)\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_1}{1\cdot 2}-\frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^2+\cdots\\ \qquad +(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1\cdot 2\cdots 2n}\alpha^{2n-2}\cdots\end{cases}$$

Die Gleichung (5) gilt bei allen *reellen* Werten von α und liefert den Rest der Reihe (6), wenn man diese bei dem Gliede vom Range n abbricht.

526. Die Bernoullischen Zahlen. Die Koeffizienten $B_1, B_2, B_3 \ldots$, welche in diesen beiden Gleichungen auftreten, sind unter dem Namen „*Bernoullische Zahlen*“ bekannt. Der allgemeine Ausdruck für die n^{te} Bernoullische Zahl ist durch die Gleichung (4) gegeben. Dieselbe enthält indes die transcendente Zahl π und auſserdem die Summe einer unendlichen Reihe. Man kann aber auch leicht die Zahlen B, welche sämtlich rational sind, nach einander berechnen. Wir betrachten die Gleichung (6), wo wir der Konvergenz halber $\alpha < 2\pi$ annehmen, und ersetzen $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ durch den gleichen Wert $\frac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$, so folgt:

$$\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\right]=\frac{B_1}{2!}-\frac{B_2}{4!}\alpha^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n-2}+\cdots$$

oder:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha}\left[1+\frac{B_1}{2!}\alpha^2-\frac{B_2}{4!}\alpha^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n}+\cdots\right].$$

Ersetzt man die Exponentialfunktionen durch ihre Reihen, so wird:

$$\frac{1}{2}\left(2+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\alpha^2}{3!}+\cdots+\frac{\alpha^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots\right)\left(1+\frac{B_1}{2!}\alpha^2+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n}+\cdots\right).$$

Die beiden Faktoren der rechten Seite sind konvergente Reihen, und die zweite Reihe bleibt konvergent, wenn man ihren Gliedern die absoluten Werte giebt, denn die Reihe (6) ist auch noch konvergent, wenn man für α den Wert αi einführt, solange nur der Modul von α kleiner als 2π ist. Führt man also die Multiplikation der beiden Reihen rechts aus und ordnet man das Produkt nach ganzen Potenzen von α, so erhält man eine konvergente Reihe, die mit der Reihe auf der linken Seite identisch sein mufs. Setzt man die Koeffizienten von α^{2n} auf beiden Seiten einander gleich, so findet man die Gleichung:

$$0=\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{(2n-1)!}\,\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{(2n-3)!}\,\frac{B_2}{4!}+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{\mu-1}}{(2n-2\mu+1)!}\,\frac{B_\mu}{(2\mu)!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{1}\,\frac{B_n}{(2n)!}.$$

Durch diese Gleichung wird B_n bestimmt, sobald man $B_1, B_2, \cdots B_{n-1}$ kennt; setzt man also nach einander $n=1,2,3\ldots$, so erhält man:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+B_1=0,$$
$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}B_1-B_2=0,$$
$$\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{6}{2}B_1-\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot4}B_2+B_3=0,$$
$$\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}B_1-\frac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot4}B_2+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}B_3-B_4=0,$$

. . . .

und hieraus:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \dots$$

Die Reihe der Bernoullischen Zahlen ist, wie man hier sieht, zuerst eine abnehmende, aber von B_3 an wird sie eine unbegrenzt wachsende.

527. Die Stirlingsche Reihe für $l\Gamma(x+1)$. Wir kehren nun zur Gleichung (1) zurück, welche den Ausdruck für $l\varphi(x)$ giebt. Mit Hilfe der Gleichung (5) erhält sie die Form:

$$(7) \begin{cases} l\varphi(x) = \frac{B_1}{2!}\int_0^\infty e^{-xy}dy - \frac{B_2}{4!}\int_0^\infty e^{-xy}y^2dy + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n!)}\int_0^\infty e^{-xy}y^{2n-2}dy + (-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^\infty \theta e^{-xy}y^{2n}dy. \end{cases}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-xy}y^{\mu-1}dy = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu} = \frac{\mu-1!}{x^\mu}$$

für jeden ganzzahligen Wert von μ, ferner ist das Integral $\int^\infty \theta e^{-xy}y^{2n}dy$ positiv und kleiner als $\int_0^\infty e^{-xy}y^{2n}dy$, d. h. kleiner als $\frac{2n!}{x^{2n+1}}$, weil θ stets zwischen 0 und 1 bleibt; man kann demnach seinen Wert mit $\theta\frac{2n!}{x^{2n+1}}$ bezeichnen, wobei θ wiederum eine Gröſse zwischen 0 und 1 bedeutet. Demnach wird der obige Wert für $l\varphi(x)$ gleich:

$$(8) \begin{cases} l\varphi(x) = \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} \\ \qquad + (-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}}, \end{cases}$$

und trägt man denselben in die Gleichung (15) in Nr. 521 ein, so erhält man für jeden positiven Wert von x:

$$(9)\begin{cases} l\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}l(2\pi) - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)l(x) + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}}. \end{cases}$$

Geht man auf der rechten Seite zur unendlichen Reihe über, so erhält man die Stirlingsche Formel, nämlich:

$$(10)\begin{cases} l\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}l(2\pi) - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)l(x) + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} + \cdots \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, daſs diese Reihe divergent ist, wie groſs auch der Wert sein mag, den man der Variabelen x beilegt; denn der Betrag des allgemeinen Gliedes

$$(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)\,2n}\frac{1}{x^{2n-1}}$$

ist nach der Gleichung (4) gleich dem Produkte der beiden Gröſsen

$$\frac{1}{2\pi x}\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdot\frac{3}{2\pi x}\cdots\frac{2n-2}{2\pi x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi^2 x}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right).$$

Der zweite dieser Faktoren konvergiert nach dem Grenzwerte $\frac{1}{2\pi^2 x}$, wenn n unbegrenzt wächst; der erste dagegen wächst über jede Grenze, denn er ist ein Produkt, bei welchem die Faktoren kleiner als 1 nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, während die Zahl der Faktoren, die gröſser sind als 1, ja sogar gröſser als ein beliebig groſser Wert, selbst gröſser werden kann als jede gegebene Zahl. Die Glieder der Reihe (10) wachsen also von einer bestimmten Stelle ab über jede Grenze, und folglich ist die Reihe divergent.

528. Einengung von $\Gamma(x+1)$ in zwei Grenzen. Es ist indessen sehr bemerkenswert, daſs die Stirlingsche Reihe, ungeachtet ihrer Divergenz, ein sehr genaues und bequemes Verfahren liefert, um $l\Gamma(x+1)$ zu berechnen; die Annäherung, welche man auf diesem Wege erhält, ist um so gröſser, je beträchtlicher x ist. Wenn nämlich x gröſser ist als 1, so nehmen

die mit den Zahlen B multiplizierten Glieder der Stirlingschen Reihe zunächst ab, und man erkennt aus der Gleichung (9), daſs der Fehler, den man bei der Anwendung der Reihe (10) begeht, seinem Betrage nach immer kleiner ist, als der Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes. Man erhält demnach die gröſste Annäherung, wenn man bei dem Gliede abbricht, welches dem Gliede mit kleinstem Werte vorangeht, und dieses kleinste Glied liefert selbst eine obere Grenze für den Fehler, welchen man begeht. Wenn man z. B. in der Gleichung (10) alle Glieder vernachlässigt, die mit B multipliziert sind, so wird der Fehler positiv und kleiner als $\frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x}$, oder, weil $B_1 = \frac{1}{6}$ ist, kleiner als $\frac{1}{12x}$; also ist:

$$(11)\quad \begin{cases} l\Gamma(x+1) > \frac{1}{2}\, l(2\pi) - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) l(x), \\ l\Gamma(x+1) < \frac{1}{2}\, l(2\pi) - x + (x + \frac{1}{2}\, l(x) + \frac{1}{12x}, \end{cases}$$

oder

$$(12)\quad \begin{cases} \Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \\ \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12x}}, \end{cases}$$

wie schon in Nr. 522 gefunden wurde.

Indem man von diesen Formeln ausgeht, kann man zwei Grenzen für die Bernoullische Zahl B_n erhalten, von denen die eine uns für das folgende nützlich sein wird. Setzt man zur Abkürzung:

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots,$$

so ist nach Gleichung (4):

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\, S_{2n}, \qquad B_1 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{4\pi^2}\,\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \qquad \frac{B_n}{B_1} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}}\,\frac{S_{2n}}{S_2}.$$

Da aber $S_{2\mu}$ abnimmt, wenn μ wächst, so wird

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} < \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{4\pi^2}, \qquad \frac{B_n}{B_1} < \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

oder, weil $B_1 = \frac{1}{6}$ ist:

$$B_{n+1} \over (2n+1)(2n+2) < \frac{B_n}{4\pi^2}, \tag{13}$$

$$B_n < \frac{1}{12} \frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}. \tag{14}$$

Die Gleichung (14) giebt eine obere Grenze für B_n. Eine untere Grenze erhält man, wenn man S_{2n} durch 1 ersetzt; es ist:

$$B_n > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}. \tag{15}$$

Ersetzt man $\Gamma(2n+1)$ in der Gleichung (14) durch seine obere Grenze, die durch die Ungleichungen (12) gegeben ist, und in der Gleichung (15) durch seine untere Grenze, so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} B_n &< \frac{1}{12} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n} e^{\frac{1}{24n}}, \\ B_n &> 2 \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}} e^{-2n}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Das Verhältnis dieser beiden Grenzen von B_n ist gleich $\frac{\pi^2}{6} e^{\frac{1}{24n}}$.

529. Der Rest der Stirlingschen Reihe. Die Formeln, welche wir aufgestellt haben, sind von Cauchy gegeben worden; sie lassen leicht die Annäherung bestimmen, mit welcher man $l\Gamma(x+1)$ nach der Stirlingschen Reihe berechnen kann. Wir bezeichnen mit u_n den Betrag des Gliedes dieser Reihe, welches vom Koeffizienten B_n abhängt, so ist

$$u_n = \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n} \frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^2}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt auf Grund der Ungleichung (13):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2},$$

und es wird also umsomehr

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{\pi^2 x^2} \quad \text{und} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{3x}\right)^2.$$

Also wird u_{n+1} kleiner als u_n, solange $n < 3x$ oder $n = 3x$ ist. Ist also x gröſser als 1, so nehmen die ersten Glieder der Stirlingschen Reihe ab, und wenn x eine ganze Zahl ist, so findet diese Abnahme sicherlich bis zu dem Gliede vom Range $3x$ statt.

Bezeichnet man nun mit ε_n den Betrag des Fehlers, welchen man begeht, wenn man die Stirlingsche Reihe mit dem Gliede, das mit B_n multipliziert ist, abbricht, so ist, wie wir sahen:

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}},$$

und umsomehr, gemäſs der Ungleichung (13):

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 x^{2n+1}},$$

und endlich, auf Grund der ersten Ungleichung (16):

$$\varepsilon_n < \frac{1}{6} \frac{(\pi n)^{\frac{1}{2}}}{x} \left(\frac{n}{e\pi x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}, \tag{17}$$

eine Grenze, die sich mittelst Logarithmen leicht berechnen läſst.

Wir sahen nun, daſs wenn x eine ganze Zahl ist, die Abnahme der Reihenglieder jedenfalls solange statt hat, als n kleiner oder gleich $3x$ ist; wählt man $n = 3x$, so giebt die Formel (17):

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x - \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72x}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x},$$

und weil x mindestens gleich 1 ist, so ist umsomehr:

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x};$$

nun ist

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} = 0{,}393409 \cdots,$$

also

$$\varepsilon_{3x} < 0{,}393409 \cdots \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6x}.$$

Bildet man die gewöhnlichen Logarithmen von beiden Seiten, so folgt, wenn man die negativen Kennziffern durch einen darüber gesetzten Strich bezeichnet:

$$(18) \qquad \log \varepsilon_{3x} < \bar{1}{,}594844 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x} + (\bar{3}{,}3942331)\, x.$$

Für $x = 1$ hat man bereits

$$\log \varepsilon_3 < \bar{4}{,}9890775,$$

also $\varepsilon_3 < \frac{1}{1000}$; für $x = 10$ ist:

$$\log \varepsilon_{30} < \overline{27}{,}047175,$$

und man sieht hieraus, dafs man in diesem Beispiele für $x = 10$ die Berechnung von $l\Gamma(x+1)$ bis auf die 26te Dezimalstelle treiben kann, wenn man mit dem Gliede B_{30} abbricht.

Die Formel (17) beweist unsere Behauptung, dafs die Stirlingsche Reihe $l\Gamma(x+1)$ allgemein mit einer Annäherung berechnen läfst, die um so gröfser wird, je beträchtlicher x ist.

530. Reihe für $\frac{d^\mu l\Gamma(x+1)}{dx^\mu}$. — Man erhält brauchbare Formeln, indem man die Reihe von Stirling ein- oder mehrmal differentiiert; da diese aber eine divergente Reihe ist, so wird auch das nämliche bei den anderen der Fall sein. Indessen können sie doch auch, ebenso wie die Stirlingsche, zur numerischen Berechnung dienen, was wir nun zeigen wollen. Zu dem Zwecke bemerken wir, dafs die Gröfse θ, welche in dem letzten Gliede der Reihe (7) vorkommt, unabhängig von x ist. Differentiiert man demnach diese Gleichung μ mal, so wird:

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu l\varphi(x)}{dx^\mu} = \frac{B_1}{1\cdot 2}\int_0^\infty e^{-xy} y^\mu\, dy - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-xy} y^{\mu+2n-2}\, dy$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^\infty \theta e^{-xy} y^{\mu+2n}\, dy.$$

Indem man nun ebenso vorgeht wie bei der Ableitung der Gleichung (8) aus (7), findet man:

$$(19)\begin{cases}(-1)^\mu \dfrac{d^\mu l\varphi(x)}{dx^\mu} = B_1 \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)} \dfrac{1}{x^{\mu+1}} - B_2 \dfrac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(5)} \dfrac{1}{x^{\mu+3}} + \cdots \\ + (-1)^{n-1} B_n \dfrac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)} \dfrac{1}{x^{\mu+2n-1}} + (-1)^n \theta B_{n+1} \dfrac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)} \cdot \dfrac{1}{x^{\mu+2n+1}}.\end{cases}$$

θ bezeichnet stets eine Größe zwischen 0 und 1. Wenn x hinreichend gross ist, so nehmen die Glieder auf der rechten Seite zunächst ab, wie bei der Stirlingschen Reihe, und der Fehler, welchen man begeht, indem man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht, ist kleiner als das folgende Glied und von demselben Zeichen wie dieses. Für den besonderen Fall $\mu = 1$ erhält man:

$$(20)\quad \frac{dl\varphi(x)}{dx} = -\frac{B_1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{B_2}{4}\frac{1}{x^4} - \cdots + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\frac{1}{x^{2n}} + (-1)^{n+1}\theta \frac{B_{n+1}}{2n+2}\frac{1}{x^{2n+2}}.$$

Aus der Gleichung (15) in Nr. 521 gewinnt man durch Differentiation:

$$\frac{dl\Gamma(x+1)}{dx} = l(x) + \frac{1}{2x} + \frac{dl\varphi(x)}{dx},$$

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu l\Gamma(x+1)}{dx^\mu} = \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + (-1)^\mu \frac{d^\mu l\varphi(x)}{dx^\mu},$$

also ist:

$$(21)\begin{cases}\dfrac{dl\Gamma(x+1)}{dx} = l(x) + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{B_1}{2}\dfrac{1}{x^2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{B_n}{2n}\dfrac{1}{x^{2n}} \\ \qquad + (-1)^{n+1}\theta \dfrac{B_{n+1}}{2n+2}\dfrac{1}{x^{2n+2}},\end{cases}$$

$$(22)\begin{cases}(-1)^\mu \dfrac{d^\mu l\Gamma(x+1)}{dx^\mu} = \dfrac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \dfrac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + B_1 \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)}\dfrac{1}{x^{\mu+1}} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1} B_n \dfrac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)}\dfrac{1}{x^{\mu+2n-1}} \\ \qquad + (-1)^n \theta B_{n+1} \dfrac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)}\dfrac{1}{x^{\mu+2n+1}}.\end{cases}$$

531. Die Eulersche Konstante. — Die erhaltenen Resultate liefern ein sehr einfaches Mittel, um die Eulersche Kon-

stante zu berechnen, welche wir mit C bezeichnet haben. Wir gehen von der Gleichung (2) in Nr. 507 aus, bei welcher x als ganze positive Zahl vorausgesetzt ist und welche, wenn man x in $x+1$ verwandelt, die Form erhält:

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{d\,l\,\Gamma(x+1)}{dx}.$$

Ersetzt man $\frac{d\,l\,\Gamma(x+1)}{dx}$ durch seinen Wert aus der Gleichung (21), so folgt:

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}\right) - l(x) - \frac{1}{2x} + \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_2}{4x^4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2nx^{2n}} + \cdots,$$

und der Fehler, welchen man begeht, indem man mit dem Gliede, das B_n enthält, abbricht, ist seinem Betrage nach kleiner als $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)x^{2n+2}}$. Ersetzt man also die Zahlen B durch ihre Werte, so findet man:

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}\right) - l(x) - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{120x^4} + \frac{1}{252x^6} - \frac{1}{240x^8} + \frac{1}{132x^{10}} - \frac{691}{32760x^{12}} + \cdots,$$

und bricht man die Entwickelung mit dem zuletzt geschriebenen Gliede ab, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{12x^{14}}$. Wählt man also $x = 10$, so hat man die Gleichung:

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10}\right) - l(10) - \frac{1}{20} + \frac{0{,}01}{12} - \frac{0{,}0001}{120} + \frac{0{,}000001}{252} - \frac{0{,}00000001}{240} + \frac{0{,}0000000001}{132} - \frac{0{,}000000000691}{32760},$$

die den Wert von C auf 15 genaue Dezimalstellen angiebt.

Es ist

$$l(10) = 2{,}302\,585\,092\,994\,045\,68$$

und

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532,$$

wie schon in Nr. 506 angegeben wurde.

532. Independente Darstellung der Bernoullischen Zahlen. Wir haben in Nr. 526 eine Formel kennen gelernt, aus welcher man successive die Zahlen B_1, B_2, $B_3 \cdots$ berechnen kann. Man kann ganz allgemein für B_n einen Ausdruck aufstellen, der von Transscendenten frei, allerdings aber etwas kompliziert ist. Immerhin halten wir es für nützlich, denselben zum Schlusse dieses Kapitels mitzuteilen. Die Bernoullischen Zahlen sind durch die Gleichung (6), Nr. 525, definiert, der man die Form geben kann:

$$(23)\quad \frac{1}{e^{\alpha}-1}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}\alpha-\frac{B_2}{4!}\alpha^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n-1}+\cdots;$$

nun ist identisch:

$$\frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{e^z-1}-\frac{2}{e^{2z}-1}.$$

Ersetzt man die Quotienten der rechten Seite durch ihre Reihen, indem man die obige Entwickelung für $\alpha = z$ und $\alpha = 2z$ bildet, so folgt:

$$(24)\quad \frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{2}-(2^2-1)\frac{B_1}{2!}z+(2^4-1)\frac{B_2}{4!}z^3-\cdots+(-1)^n(2^{2n}-1)\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}+\cdots$$

und diese Reihe ist konvergent für alle Werte von z, deren Modul kleiner ist als π. Also ist nach der Mac-Laurinschen Formel:

$$(25)\quad (-1)^n\frac{2^{2n}-1}{2n}B_n=\frac{d^{2n-1}\dfrac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}}\qquad (\text{für } z=0).$$

Die erste Ableitung der Funktion $(e^z+1)^{-1}$ ist $\frac{-e^z}{(e^z+1)^2}$, und es ist leicht zu sehen, dafs man allgemein die Gleichung erhält:

$$\frac{d^{2n-1}(e^z+1)^{-1}}{dz^{2n-1}}=\frac{A_1e^{(2n-1)z}+A_2e^{(2n-2)z}+\cdots+A_{2n-1}e^z}{(e^z+1)^{2n}}.$$

Die Koeffizienten $A_1, A_2, \cdots A_{2n-1}$ sind unabhängig von z. Weiter aber erkennt man aus der Gleichung (24), dafs die erste Ableitung der Funktion $(e^z+1)^{-1}$ eine gerade Funktion von z ist, die sich nicht ändert, wenn man z in $-z$ verwandelt. Dasselbe gilt dann auch für alle Ableitungen ungerader Ordnung.

Durch diese Verwandlung von z in $-z$ wird aber der vorstehende Ausdruck:

$$\frac{A_{2n-1}e^{(2n-1)z}+A_{2n-2}e^{(2n-2)z}+\cdots+A_1 z}{(e^z+1)^{2n}},$$

es mufs also allgemein $A_{2n-i}=A_i$ sein, d. h.

$$(26)\quad \frac{d^{2n-1}(e^z+1)^{-1}}{dz^{2n-1}}=\frac{A_1[e^{(2n-1)z}+e^z]+\cdots+A_{n-1}[e^{(n+1)z}+e^{(n-1)z}]+A_n e^{nz}}{(e^z+1)^{2n}}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{1}{e^z+1}=\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}=e^{-z}-e^{-2z}+e^{-3z}-\cdots+(-1)^{\mu-1}e^{-\mu z}+\cdots,$$

also:

$$\frac{d^{2n-1}(e^z+1)^{-1}}{dz^{2n-1}}=-e^{-z}+2^{2n-1}e^{-2z}-3^{2n-1}e^{-3z}+\cdots$$
$$+(-1)^\mu\mu^{2n-1}e^{-\mu z}+\cdots;$$

ferner ist

$$(e^z+1)^{2n}=e^{2nz}+\frac{2n}{1}e^{(2n-1)z}+\cdots+\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-i+1)}{i!}e^{(2n-i)z}+\cdots$$
$$+2ne^z+1.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen, so folgt aus der Gleichung (26):

$$A_1[e^{(2n-1)z}+e^z]+\cdots+A_{n-1}[e^{(n+1)z}+e^{(n-1)z}]+A_n e^{nz}$$
$$=[-e^{-z}+2^{2n-1}e^{-2z}+\cdots+(-1)^\mu\mu^{2n-1}e^{-\mu z}+\cdots]$$
$$\times\left[e^{2nz}+\frac{2n}{1}e^{(2n-1)z}+\cdots+\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-i+1)}{i!}e^{(2n-i)z}+\cdots+2ne^z+1\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Funktion von e^z. Führt man also das Produkt auf der rechten Seite aus, so bleiben nur solche Glieder noch, welche positive Potenzen von e^z enthalten. Da die Glieder mit dem Faktor $e^{(2n-\mu)z}$ auf beiden Seiten einander gleich sind, so findet man

$$A_1=-1$$

und für die Werte von μ größer als 1:

$$(27)\begin{cases} A_\mu = (-1)^\mu \Big[\mu^{2n-1} - \frac{2n}{1}(\mu-1)^{2n-1} + \cdots \\ \qquad + (-1)^i \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-i+1)}{i!}(\mu-i)^{2n-1} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{\mu-1}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-\mu+2)}{\mu-1!}1^{2n-1}\Big]. \end{cases}$$

Die Formeln (25) und (26) ergeben:

$$(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n} B_n = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + \frac{1}{2}A_n\right).$$

Also ist:

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n} B_n \\ = &-1 + (2^{2n-1} - 2n) - \left(3^{2n-1} - 2n\,2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2!}\right) + \cdots \\ &+ (-1)^{n-1}\left((n-1)^{2n-1} - 2n(n-2)^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{2n\cdots(n+3)}{(n-2)!}\right) \\ &+ \frac{1}{2}(-1)^n\left(n^{2n-1} - 2n(n-1)^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n\cdots(n+2)}{(n-1)!}\right). \end{aligned}$$

Vereinigt man schließlich die mit n^{2n-1}, $(n-1)^{2n-1}$ u. s. w. multiplizierten Glieder, so erhält man:

$$(28)\begin{cases} \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n} B_n \\ = \frac{1}{2}n^{2n-1} - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2n}{1}\right)(n-1)^{2n-1} + \left(1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\right)(n-2)^{2n-1} \\ - \left(1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)(n-3)^{2n-1} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

eine Gleichung, in welcher das Gesetz, nach welchem die auf einander folgenden Glieder zu berechnen sind, evident ist. Das Produkt der n^{ten} Bernoullischen Zahl mit $2^{2n-1}(2^{2n}-1)$ ist gleich einem ganzen Vielfachen von n.

533. Übersicht über den Verlauf der Gammafunktion. Die ursprüngliche Definition der Gammafunktion durch ein bestimmtes Integral (Nr. 499) bezog sich nur auf positive

Werte des Argumentes. Später aber gelangten wir mittelst der Gleichung (10) von Nr. 505 zu einer für alle reellen und komplexen Werte gültigen Darstellung, wie sie namentlich von Gaufs der ganzen Theorie zu Grunde gelegt wurde. Aus dieser neuen Definition ergab sich in Nr. 511 unter anderem auch die Allgemeingültigkeit der „zweiten Eigenschaft“

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

welche zur Berechnung der Funktion für negative Argumente besonders bequem ist. Mit ihrer Hilfe sind wir nunmehr imstande, den ganzen Verlauf der Gammafunktion im Reellen anzugeben.

Dafs die Funktion für positive x nur ein einziges Minimum $\Gamma(1{,}4616\ldots) = 0{,}8856\ldots$ besitzt, haben wir bereits in Nr. 508 gesehen, und wir wissen, dafs sie für $x = 1$ und für $x = 2$ den Wert 1 annimmt und dafs sie sowohl für $x = 0$ als auch für $x = \infty$ unendlich grofs wird. Aus der obigen Gleichung ergiebt sich nun, dafs sie auch für negative endliche Werte niemals verschwindet, für alle *ganzzahligen* negativen Werte aber und nur für solche mit Vorzeichenwechsel unendlich grofs wird. Die Kurve besteht also links von der Ordinatenaxe aus einer Reihe von getrennten Zweigen, welche abwechselnd ganz oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe verlaufen und die Parallelen zur Ordinatenaxe $x = -1,\ -2,\ -3, \ldots$ zu Asymptoten haben. Aus der Reihenentwicklung (1) von Nr. 506 folgt weiter, dafs die Funktion

$$\frac{d^2 l\,\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$$

und damit auch $\Gamma(x)\,\Gamma''(x)$ für *alle* Werte x *beständig positiv* ist, dafs also in jedem einzelnen Zweige $\Gamma''(x)$ sein Vorzeichen nicht ändert und daher in jedem der absolute Betrag von $\Gamma(x)$ ein einziges Minimum besitzt. Diese Minima nähern sich für negativ wachsende x asymptotisch der Null, weil dann $\Gamma(1-x)$ unendlich grofs wird, und genügen der Gleichung

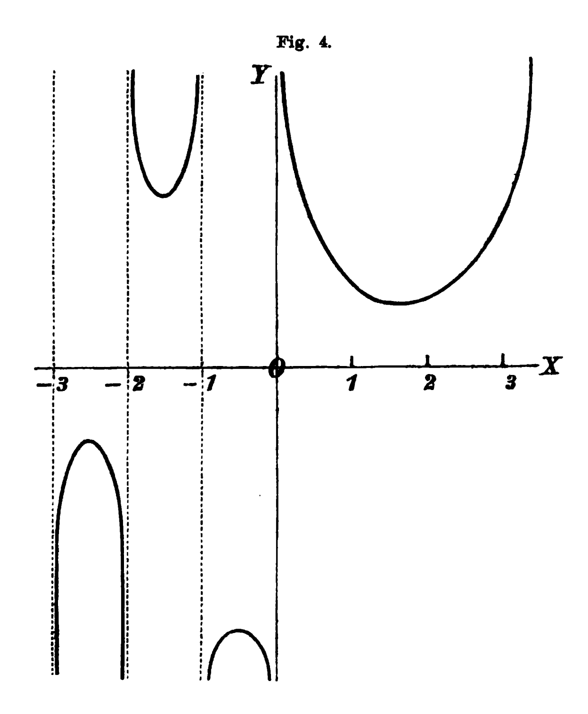
$$\frac{d l\,\Gamma(1-x)}{dx} = \pi \cot \pi x = -\pi \cot \pi (1-x),$$

die man aus der obenstehenden „zweiten Eigenschaft" durch logarithmische Differentiation und Nullsetzung von $\Gamma'(x)$ erhält. Durch näherungsweise Auflösung dieser Gleichung findet man für die ersten dieser Minima auf zwei Dezimalstellen:

$$\Gamma(-0{,}50) = -3{,}54,$$
$$\Gamma(-1{,}57) = +2{,}30,$$
$$\Gamma(-2{,}61) = -0{,}89,$$
$$\Gamma(-3{,}635) = +0{,}245.$$

Die Kurve der Gammafunktion hat also den in Fig. 4 gezeichneten Verlauf.

Fig. 4.



Zum Schlusse geben wir noch eine kleine Tabelle der Werte von $\Gamma(x)$ und $\frac{d\,l\,\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ sowie der gewöhnlichen Logarithmen von $\Gamma(x)$ für $1 < x < 2$, aus denen

sich vermöge der beiden ersten Eigenschaften der Funktion alle übrigen Werte leicht berechnen lassen.

x	$\Gamma(x)$	$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$	$\log_{10} \Gamma(x)$
1,00	1,0000	— 0,5772	0,00000
1,05	0,9735	— 0,4978	9,98834
1,10	0,9514	— 0,4237	9,97834
1,15	0,9330	— 0,3543	9,96990
1,20	0,9182	— 0,2890	9,96292
1,25	0,9064	— 0,2274	9,95732
1,30	0,8975	— 0,1692	9,95302
1,35	0,8911	— 0,1139	9,94995
1,40	0,8873	— 0,0614	9,94805
1,45	0,8857	— 0,0113	9,94727
1,50	0,8862	+ 0,0365	9,94754
1,55	0,8889	0,0822	9,94884
1,60	0,8935	0,1260	9,95110
1,65	0,9001	0,1681	9,95430
1,70	0,9086	0,2085	9,95839
1,75	0,9191	0,2475	9,96334
1,80	0,9314	0,2850	9,96913
1,85	0,9456	0,3212	9,97571
1,90	0,9618	0,3562	9,98307
1,95	0,9799	0,3900	9,99117
2,00	1,0000	0,4228	0,00000

Fünftes Kapitel.

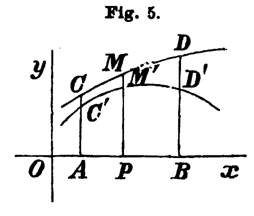
Die Quadratur und Rektifikation von Kurven.

§ 1. Die Quadratur ebener Kurven.

534. Berechnung des Flächeninhaltes überhaupt. Die Integration des Differentiales $f(x)\,dx$ wird häufig mit dem Namen *Quadratur* bezeichnet. In der That ist diese Operation, wie wir gesehen haben (Nr. 403 ff.), dieselbe, wie die, welche man auszuführen hat, um die Fläche zwischen der Kurve, deren Ordinaten $f(x)$ sind, der Abscissenaxe und zwei bestimmten Ordinaten zu berechnen.

Soll die Fläche gemessen werden, welche zwischen zwei gegebenen Kurven CMD, $C'M'D'$ und den Ordinaten $CC'A$ und $DD'B$ liegt, die den Abscissenwerten x_0 und x_1 entsprechen, so hat man zu bemerken, dafs diese Fläche die Differenz von $CDBA$ und $C'D'BA$ ist. Bezeichnet man also mit y und y' die Ordinaten MP, $M'P$ der beiden Kurven, die der variabelen Abscisse x entsprechen, so ist die gesuchte Fläche im Falle rechtwinkliger Koordinaten

Fig. 5.



$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx - \int_{x_0}^{x_1} y'\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (y - y')\,dx.$$

Diese Formel ist auch anwendbar auf den Fall, dafs man die Fläche eines Segmentes sucht zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne. Alsdann ist y' eine lineare Funktion, gleich $ax + b$.

Eine ebene Fläche, welche von irgend welchen Kurvenstücken, die analytisch definiert sind, begrenzt ist, kann immer

in mehrere positive oder negative Teile zerlegt werden, die einzeln berechenbar sind, wie wir noch näher angeben werden.

Bei den Problemen der Quadratur sind aber nicht immer nur geradlinige Koordinaten die Variabelen, welche man anzuwenden hat. Insbesondere ist es häufig von Vorteil, Polarkoordinaten einzuführen. Alsdann bestimmt man die Flächen gewisser Sektoren, welche von einem Kurvenbogen und zwei Radienvektoren begrenzt werden. Nennt man ϱ, ω die Polarkoordinaten, ω_0 und ω_1 die Werte von ω, welche zu den beiden äufseren Radien gehören, so wird der allgemeine Ausdruck für die Fläche solch eines Sektors (Nr. 204):

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2 d\omega.$$

Will man die Fläche bestimmen, welche zwischen zwei gegebenen Kurven und den Radienvektoren, die zu ω_0 und ω_1 gehören, gelegen ist, so hat man die Formel

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\varrho^2 - \varrho'^2)\, d\omega$$

anzuwenden, in welcher ϱ und ϱ' die Radienvektoren der beiden Kurven bedeuten.

Schon in der Differentialrechnung haben wir verschiedene Beispiele von Quadraturen gegeben, bei denen sich die Integration unmittelbar ausführen läfst. Wir fügen diesen hier noch einige andere hinzu.

535. Parabolische Kurven. Unter diesem Namen begreift man alle die Kurven, welche sich im geradlinigen Koordinatensysteme durch eine Gleichung von der Form

$$y^m = px^n$$

darstellen lassen, wobei die Exponenten m und n positiv sind.

Fig. 6.

Wir bezeichnen mit u die Fläche OMP zwischen der Kurve, der Abscissenaxe und der Ordinate $MP = y$. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx,$$

also

$$u = p^{\frac{1}{m}} \int_0^x x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}+1} = \frac{m}{m+n} xy;$$

das Produkt xy ist gleich der Fläche des Rechteckes $OPMQ$, konstruiert mit den Koordinaten des Punktes M; also ist

$$\frac{OMP}{OPMQ} = \frac{m}{m+n} \quad \text{oder} \quad \frac{OMP}{OMQ} = \frac{m}{n}.$$

Die parabolische Kurve teilt also die Fläche des Rechteckes in zwei Teile, die in dem Verhältnis der Zahlen m und n zu einander stehen.

Umgekehrt ist auch jede Kurve, welche diese Eigenschaft hat, eine parabolische; denn die obige Gleichung, nämlich

$$\frac{u}{xy - u} = \frac{m}{n}$$

liefert

$$u = \frac{m}{m+n} xy, \qquad du = y\,dx = \frac{m}{m+n}(x\,dy + y\,dx)$$

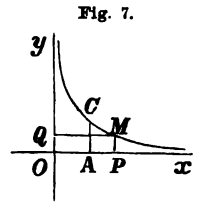
und

$$n\frac{dx}{x} - m\frac{dy}{y} = 0 \quad \text{oder} \quad dl(x^n) - dl(y^m) = 0.$$

Hieraus folgt, dafs das Verhältnis $\frac{y^m}{x^n}$ eine Konstante ist.

536. Hyperbolische Kurven. Mit diesem Namen bezeichnet man alle Kurven, die sich in geradlinigen Koordinaten durch eine Gleichung von der Form

Fig. 7.



$$x^n y^m = p$$

darstellen lassen, wobei m und n positive Exponenten bedeuten. Wir nehmen an, dafs m nicht kleiner sei als n, und betrachten den Zweig der Kurve, welcher zu positiven Koordinaten gehört und die beiden Axen zu Asymptoten hat. Es seien $AC = y_0$ und $PM = y$ die Ordinaten, welche zu den Abscissen x_0 und x gehören, u die Fläche zwischen diesen Koordinaten, der Abscissenaxe und der Kurve. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist alsdann

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx,$$

also wird für den Fall $m > n$:

$$u = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} \left(x^{\frac{m-n}{m}} - x_0^{\frac{m-n}{m}} \right);$$

man sieht hieraus, dafs die Fläche u über jede Grenze hinaus wächst, wenn x unendlich wird, dafs sie dagegen nach einer bestimmten Grenze

$$U = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} xy$$

konvergiert, wenn x_0 null wird. Diese Formel besagt, dafs die Fläche U, welche sich längs der y-Axe ins Unendliche erstreckt, zu dem Rechteck $OPMQ$, das mit den Koordinaten des Punktes M konstruiert ist, in dem konstanten Verhältnisse von m zu $m - n$ steht.

Diese Eigenschaft kommt nur den hyperbolischen Kurven zu, denn die obige Formel ergiebt

$$dU = y\,dx = \frac{m}{m-n}(x\,dy + y\,dx),$$

und hieraus folgt:

$$m\frac{dy}{y} + n\frac{dx}{x} = 0 \quad \text{oder} \quad dl(x^n y^m) = 0, \quad \text{als} \quad x^n y^m = \text{const.}$$

537. Die Lemniskate. Unter den Kurven, deren Quadratur im Sinne der Geometrie vollkommen ausführbar ist, ist die Lemniskate von Bernoulli zu bemerken. Diese Kurve hat die Eigenschaft, *dafs die Entfernungen jedes Kurvenpunktes von zwei festen Punkten, deren Abstand* 2a *ist, ein konstantes Produkt bilden, nämlich* a². In Polarkoordinaten erhält die Lemniskate die Gleichung

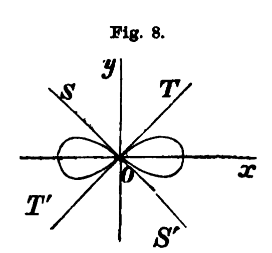
$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega;$$

ϱ bezeichnet den vom Centrum ausgehenden Radiusvektor. Die Fläche u eines Sektors, der durch die beiden Radien begrenzt ist, welche zu den Werten ω_0 und ω_1 von ω gehören, wird:

$$u = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2 d\omega = a^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} \cos 2\omega\, d\omega = \frac{a^2}{2}(\sin 2\omega_1 - \sin 2\omega_0).$$

Die Kurve ist symmetrisch zur Polaraxe Ox und der dazu senkrechten Axe Oy; sie besteht aus zwei geschlossenen Zweigen, deren Tangenten TT', SS' im Centrum O unter einem Winkel von 45^0 zur Axe geneigt sind. Will man also die Fläche bestimmen, welche von der einen Hälfte umschlossen wird, so hat man $\omega_0 = -\frac{\pi}{4}$ und $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ zu setzen, und dies ergiebt

Fig. 8.



$$u = a^2.$$

538. Folium von Descartes. Die unter diesem Namen bekannte Kurve hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung:

Fig. 9.

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

a ist ein gegebener Parameter. Die Kurve hat eine Asymptote, nämlich die Gerade

$$x + y + a = 0.$$

Im Koordinatenanfangspunkt besitzt sie einen Doppelpunkt, die Tangenten desselben fallen mit den Axen zusammen. Substituiert man für x und y Polarkoordinaten ϱ und ω mittelst der Gleichungen:

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

so wird die Gleichung der Kurve

$$\varrho = \frac{3a \sin \omega \cos \omega}{\sin^3 \omega + \cos^3 \omega},$$

und die der Asymptote

$$\varrho_1 = \frac{-a}{\sin \omega + \cos \omega}.$$

Die Fläche zwischen der Kurve und zwei Radien, die zu den Werten ω_0 und ω_1 gehören, wird demnach

$$u = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2 \, d\omega = \frac{3a^2}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{3 \operatorname{tang}^2 \omega \dfrac{d\omega}{\cos^2 \omega}}{(1 + \operatorname{tang}^3 \omega)^2}.$$

Die Gröfse unter dem Integrale ist das Differential von $-\dfrac{1}{1+\operatorname{tang}^3\omega}$, also ist

$$u = \frac{3a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{tang}^3\omega_0} - \frac{1}{1+\operatorname{tang}^3\omega_1}\right].$$

Will man die Fläche der von der Kurve gebildeten Schleife bestimmen, so ist $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, und dies ergiebt $u = \frac{3a^2}{2}$.

Um die Fläche zu berechnen, die zwischen einem Teile der Kurve, ihrer Asymptote und zwei Radienvektoren liegt, mufs man u von der Fläche u_1 abziehen, die durch die Asymptote und die zwei Radien begrenzt ist. Diese Fläche ist ein Dreieck, und man erhält für dieselbe den Ausdruck

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho_1^2\, d\omega = \frac{a^2}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\dfrac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1+\operatorname{tang}\omega)^2},$$

also

$$u_1 = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{tang}\omega_0} - \frac{1}{1+\operatorname{tang}\omega_1}\right].$$

Mithin folgt:

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2}\left[\frac{2-\operatorname{tang}\omega_1}{1-\operatorname{tang}\omega_1+\operatorname{tang}^2\omega_1} - \frac{2-\operatorname{tang}\omega_0}{1-\operatorname{tang}\omega_0+\operatorname{tang}^2\omega_0}\right].$$

Will man die unendliche Fläche berechnen zwischen der Kurve, der Asymptote und dem negativen Teile der x-Axe, so hat man $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$, $\omega_1 = \pi$ zu setzen; hieraus folgt:

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2}.$$

Den nämlichen Wert bekommt, wie leicht zu sehen, die zwischen der negativen y-Axe, der Kurve und ihrer Asymptote enthaltene Fläche. Addiert man zu diesen beiden Flächen das Dreieck, welches von der Asymptote und den beiden Axen gebildet wird, das ebenfalls gleich $\frac{a^2}{2}$ ist, so erhält man die gesamte Fläche $\frac{3a^2}{2}$ zwischen der ganzen Kurve und ihrer Asymptote. Diese Fläche ist ebenso grofs wie die der Schleife.

§ 2. Über angenäherte Berechnung ebener Flächen vermittelst linearer Messungen.

539. Von der mechanischen Quadratur überhaupt. Soll der Flächeninhalt einer gezeichnet vorliegenden, von Kurven begrenzten ebenen Fläche bestimmt werden, bei welcher die Gleichung der Begrenzungskurve nicht gegeben ist, so erfordert die Bestimmung der Flächengröſse entweder besondere mechanische Hilfsmittel, wie z. B. das Planimeter, oder sie wird mit Annäherung durch lineare Messungen geleistet. Ebenso erfordert die analytische Berechnung des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn $f(x)$ eine Funktion ist, deren Integral sich nicht durch die elementaren Funktionen darstellen läſst, besonderer Annäherungsmethoden, indem man z. B., falls dies möglich ist, die Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt, oder sie nach der Interpolationsmethode von Lagrange durch ein rationales Polynom ersetzt. In Bezug auf diese letztere Methode, die durch das Verfahren von Gauſs (Ges. Werke, Bd. 3) zu einem wichtigen analytischen Hilfsmittel ausgebildet ist, verweise ich insonderheit auf den Abschnitt über „Mechanische Quadratur“ in dem *Handbuche der Kugelfunktionen*, Bd. 2 von Heine, und will hier nur in Kürze die einfachsten Messungsmethoden besprechen. Dieselben sind von Herrn Mansion ausführlich behandelt worden (*Annales de la société scientif. de Bruxelles, 1881;* siehe auch *Civilingenieur*, Bd. 28).

540. Die Methode der Trapeze. Um den Flächeninhalt eines gezeichnet vorliegenden Diagrammes zu bestimmen, welches wir uns durch Parallele zur Ordinatenaxe in zum Teil geradlinig begrenzte Gebiete oder Flächenstreifen zerlegt denken, hat man an Stelle der krummlinig begrenzten Fläche zwei Polygone einzuführen, von denen das eine seinem Inhalte nach gröſser, das andere kleiner ist als die zu bestimmende Fläche. In der Konstruktion dieser Polygone, welche eine obere und eine untere Grenze für den gesuchten Flächeninhalt liefern, muſs zugleich die Möglichkeit einer beliebigen Annäherung enthalten sein. Dabei wird man, sobald es sich

um eine graphisch (und nicht analytisch) gegebene Kontour handelt, die Benutzung der Ableitungen ausschliefsen, weil die Konstruktion von Tangenten eine neue Fehlerquelle herbeiführen würde. Für einen einzelnen Flächenstreifen ABN_2N_1 (Fig. 10) bildet, wenn die konkave Seite der Fläche der Abscissenaxe zugekehrt ist, das gleichnamige Trapez ABN_2N_1 eine untere Grenze. Zur Konstruktion einer brauchbaren oberen Grenze ist aber die Tangente in irgend einem Punkte der Kurve erforderlich. In diesem Umstande liegt es begründet, dafs man die auszumessende Fläche in eine g e r a d e Anzahl von Streifen zu zerlegen sucht. Denn konstruiert man für den Doppelstreifen (Fig. 11) die Tangente im mittleren Punkte B, so ist der Inhalt des Trapezes, welches durch diese Tangente, sowie durch die Abschnitte derselben auf den Ordinaten y_1 und y_3 bestimmt wird, gleich $2hy_2$, also durch die mittlere Ordinate ausdrückbar, ohne dafs die Tangente gezeichnet werden mufs.

Fig. 10.

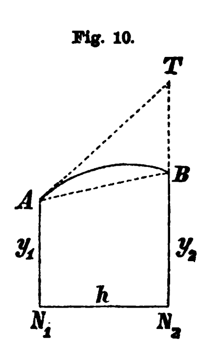


Fig. 11.

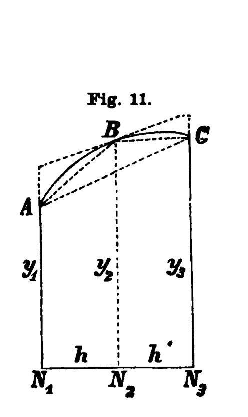
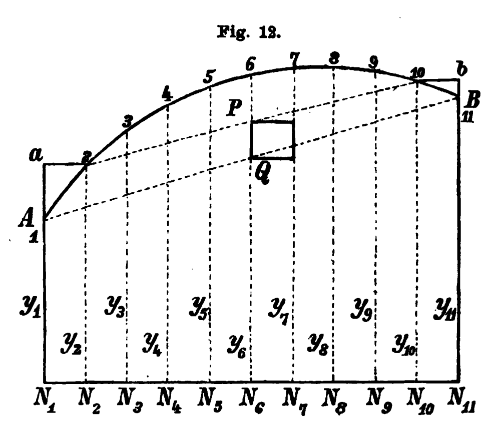


Fig. 12.



Demnach betrachten wir im folgenden ein Diagramm (Fig. 12), begrenzt erstlich durch die Kurve AB, bei welcher sich der Sinn der Krümmung nicht ändert, die also etwa durchweg ihre konkave Seite nach unten kehrt, ferner durch die Ordinaten in den Endpunkten und durch die Abscissenaxe. Wir denken uns dasselbe in eine gerade Anzahl von Streifen

mit der gleichen Breite h zerlegt (etwa 10) und bezeichnen im folgenden die Summe der Ordinaten mit ungeradem Index, mit Ausnahme der ersten und der letzten, durch:

$$u = y_3 + y_5 + y_7 + y_9,$$

die Summe der Ordinaten mit geradem Index durch:

$$g = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}.$$

Alsdann giebt es nur eine einzige leicht berechenbare obere Grenze für die Fläche F, nämlich die Summe der Trapeze, welche durch die Tangenten in den Punkten 2, 4, 6, 8, 10 der Kurve gebildet werden und die Breite $2h$ besitzen. Die Summe ihrer Flächenzahlen ist:

$$M = 2h(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) = 2hg,$$

und es ist

$$M > F.$$

Brauchbare untere Grenzen lassen sich dagegen auf dreierlei Weisen bilden. Die erste, bei welcher nur die Ordinaten mit geradem Index und aufserdem die erste und letzte benutzt werden, erhält man, indem man die Geraden 12, 24, 46, 68, 8 10, 10 11 zieht. Die Summe m_1 der auf diese Weise konstruierten sechs Trapeze wird gleich:

$$m_1 = h\left[\frac{1}{2}(y_1 + y_2) + (y_2 + y_4) + \cdots + (y_8 + y_{10}) + \frac{1}{2}(y_{10} + y_{11})\right],$$

oder $m_1 = 2gh - hd$, wobei $d = \frac{1}{2}(y_2 + y_{10}) - \frac{1}{2}(y_1 + y_{11})$ ist.

Die zweite untere Grenze, im allgemeinen minder genau, weil die Anzahl der Trapeze, aus denen sie sich zusammensetzt, um eins kleiner ist, erhält man, wenn man nur die Ordinaten mit ungeradem Index benutzt, indem man die Linien 13, 35, . . . 9 11 zieht; es wird:

$$\begin{aligned} m_2 &= h[(y_1 + y_3) + (y_3 + y_5) + \cdots + (y_9 + y_{11})] \\ &= 2hu + h(y_1 + y_{11}). \end{aligned}$$

Endlich die dritte, welche der gesuchten Fläche am nächsten kommt, wird durch die Verbindung von je zwei auf einander folgenden Punkten gebildet; sie ergiebt den Wert:

$$m_3 = \frac{h}{2}[(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_{10} + y_{11})],$$

oder:

$$m_3 = \frac{h}{2}[2g + 2u + y_1 + y_{11}].$$

541. Die Formel von Poncelet. Man setze die gesuchte Fläche gleich dem arithmetischen Mittel aus den Grenzen M und m_1; der so entstehende Näherungswert sei F_1. Es ist

$$F_1 = \frac{1}{2}(M + m_1) = 2hg - \frac{1}{2}hd.$$

Der Fehler ε_1 ist höchstens gleich $\pm\frac{1}{2}(M - m_1)$, also $\varepsilon_1 \leqq \frac{1}{2}hd$.

Diese Formel benutzt also, aufser der ersten und letzten Ordinate, nur die Ordinaten mit geradem Index; zugleich läfst sich der Maximalwert des Fehlers sehr leicht graphisch darstellen; es ist:

$$\frac{1}{2}(y_2 + y_{10}) - \frac{1}{2}(y_1 + y_{11}) = PQ, \qquad \text{(Fig. 12)}$$

also hd gleich dem Rechtecke aus der Höhe PQ und der Breite h. Es ist aber auch

$$hd = h\left[\frac{1}{2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(y_{10} - y_{11})\right] = \Delta(1, 2, a) + \Delta(10, 11, b),$$

wobei die Dreiecke mit positivem oder negativem Zeichen zu berechnen sind, je nachdem $y_2 - y_1$ und $y_{10} - y_{11}$ positiv oder negativ ausfallen.

542. Die Formel von Parmentier. Diese Formel geht von der Voraussetzung aus, dafs die gesuchte Fläche der Grenze M näher kommt, als der Grenze m_1, wie das auch der Anblick der Figur bei Kurven, die nicht besonders stark gekrümmt sind, lehrt. Sie führt daher diese Grenzen mit verschiedenem Gewichte ein und setzt

$$F_2 = \frac{1}{3}(2M + m_1) = 2gh - \frac{1}{3}hd.$$

Der Fehler ε_2 kann hier gleich werden der Differenz $F_2 - m_1 = \frac{2}{3}hd$, die Fehlergrenze ist also, allgemein zu reden, ungünstiger als im vorigen Falle. Diese Grenze wird

aber nur dann nahezu erreicht werden, wenn die Voraussetzung, daſs $F > \frac{1}{2}(M + m_1)$ ist, nicht zutrifft. Ist dieselbe richtig, so kann ε_2 nicht gröſser werden als $\frac{1}{3}hd$.

Auch diese Formel benutzt nur ebensoviel Ordinaten, und zwar die nämlichen wie die Poncelet sche.

543. Die Trapezformel. Die Trapezformel setzt die Fläche gleich der unteren Grenze m_2, benutzt also sämtliche elf Ordinaten. Sie ist aber nichts anderes als das arithmetische Mittel zwischen M und m_2; es ist:

$$F_3 = m_3 = \frac{1}{2}(M + m_2) = h\left[g + u + \frac{1}{2}(y_1 + y_{11})\right].$$

Mithin wird auch hierbei der für jede Annäherungsformel wesentlichen Forderung genügt, daſs die Fehlergrenze angebbar ist; denn es ist:

$$\varepsilon_3 \leqq \frac{1}{2}(M - m_2) = h\left[g - u - \frac{1}{2}(y_1 + y_{11})\right] = \frac{1}{2}h\delta.$$

Diese Gröſse δ ist nicht so einfach zu konstruieren, wie d, doch läſst auch sie sich graphisch darstellen; der Betrag von δ ist immer kleiner als der Betrag von $2d$. Man erkennt schon aus dieser Herleitung, daſs die Trapezformel, obwohl sie mehr Ordinaten benutzt, doch minder genau ist als die beiden vorhergehenden. Denn es wird bei derselben die im allgemeinen minder genaue untere Grenze m_2 eingeführt.

544. Die Simpsonsche Regel. Die Simpsonsche Regel nimmt als obere Grenze M, als untere m_3; aber wiederum nicht so, daſs sie das arithmetische Mittel aus diesen Werten bildet, sondern sie erteilt der unteren Grenze m_3 ein gröſseres Gewicht. Sie setzt

$$F_4 = \frac{1}{3}(M + 2m_3) = \frac{1}{3}h[2u + 4g + y_1 + y_{11}].$$

Die Fehlergrenze wird durch die gröſsere der Zahlen $M - F_4$ und $F_4 - m_3$ bestimmt, ist also:

$$\varepsilon_4 \leqq \frac{1}{3}h[2g - 2u - (y_1 + y_{11})] = \frac{1}{3}h\delta;$$

wird aber, da F im allgemeinen zwischen m_3 und $\frac{1}{2}(M + m_3)$ liegt, in den meisten Fällen kleiner sein als $\frac{1}{6} h\delta$.

Diese Herleitung der Simpsonschen Regel stützt sich nicht auf die Flächenbestimmung einer Parabel zweiter Ordnung, bei welcher, ebenso wie bei der Parabel dritter Ordnung, diese Regel ein exaktes Resultat liefert, sondern benutzt lediglich das Prinzip der um- und eingeschriebenen Polygone. Bei der bisher üblichen Ableitung der Regel, in der man die gegebenen Kurven durch Parabelbögen ersetzt, fehlt der Nachweis, dafs man wirklich eine angenäherte Berechnung erreicht, sowie die Bestimmung der Fehlergrenze.

Das in der Simpsonschen Regel ähnlich wie in der Formel von Parmentier geübte Verfahren, die obere und untere Grenze mit verschiedenem Gewichte einzuführen, läfst sich folgendermafsen begründen. Bezeichnen M und m die Grenzen für eine Fläche, welche durch Teilung der Abscissenaxe in gleich grofse Intervalle von der Länge h gewonnen sind, so wird der Wert der Fläche F exakt bestimmt sein, sobald das Verhältnis der positiven Differenzen $M - F$ und $F - m$ bekannt ist. Bezeichnet man dasselbe mit z, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{M - F}{F - m} = z$$

die Relation:

$$F = \frac{M + zm}{1 + z}.$$

Es giebt also die Gröfse z das Verhältnis der Gewichte an, mit denen M und m in die Rechnung einzuführen sind. Während nun der Wert von z bei einer beliebigen endlichen Teilung der Abscissenaxe keineswegs bekannt ist, so gelingt es doch in den meisten Fällen, den Grenzwert zu bestimmen, welchem sich z unbegrenzt nähert, wenn die Länge h der Teilintervalle nach 0 konvergiert. Ist dieser Grenzwert von z fixierbar, gleich z_0, so wird es angezeigt sein, auch schon bei einer endlichen, jedoch kleinen Länge h diesen Wert für z einzuführen, also die Annäherungsformel

$$F_1 = \frac{M + z_0 m}{1 + z_0}$$

anzusetzen. Denn es ist dann der wahre Wert der Fläche:

$$F = \frac{M + (z_0 + \delta)\, m}{1 + z_0 + \delta},$$

wobei δ eine Gröfse bezeichnet, die um so kleiner wird, je kleiner h gewählt ist; und mithin der Unterschied

$$F_1 - F = \frac{(M - m)\,\delta}{(1 + z_0)\,(1 + z_0 + \delta)}$$

eine Gröfse, in der schliefslich *beide* Faktoren des Zählers nach null konvergieren.

Betrachtet man nun eine in zwei Streifen von der Breite h zerlegte Fläche t (Fig. 11) und setzt $\int f(x)\,dx = F(x)$, so wird

$$F = F(x + 2h) - F(x) = 2hf(x) + 2h^2 f'(x) + \frac{4}{3} h^3 f''(x_2)$$
$$(x < x_2 < x + 2h).$$

Die obere Grenze, gebildet durch die Tangente im mittleren Punkt B, hat den Wert:

$$M = 2hy_2 = 2hf(x + h) = 2hf(x) + 2h^2 f'(x) + h^3 f''(x_1)$$
$$(x < x_1 < x + h).$$

Führt man als untere Grenze die Summe der Trapeze ABN_2N_1 und BCN_3N_2 ein, so wird:

$$m = \frac{h}{2}[y_1 + 2y_2 + y_3] = \frac{h}{2}[f(x) + 2f(x + h) + f(x + 2h)]$$
$$= 2hf(x) + 2h^2 f'(x) + \frac{h^3}{2}[f''(x') + 2f''(x'')]$$
$$(x < x' < x + h) \qquad (x < x'' < x + 2h).$$

Also ist:

$$M - F = h^3\left[f''(x_1) - \frac{4}{3} f''(x_2)\right],$$
$$F - m = h^3\left[\frac{4}{3} f''(x_2) - \frac{1}{2} f''(x') - f''(x'')\right],$$

und folglich:

$$z = \frac{f''(x_1) - \frac{4}{3} f''(x_2)}{\frac{4}{3} f''(x_2) - \frac{1}{2} f''(x') - f''(x'')}.$$

Mithin ist:

$$z_0 = \lim_{h=0} z = \frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = 2,$$

und demnach der beste Annäherungswert:

$$\frac{M + 2m}{3} = \frac{h}{3}[y_1 + 4y_2 + y_3],$$

wie die Simpsonsche Regel in der That vorschreibt. Zugleich ersieht man, daſs dieser Wert genau richtig ist, wenn $f''(x)$ konstant ist, also bei einer Parabel zweiter Ordnung.

545. Das Korrektionsglied der Simpsonschen Regel. Für die angenäherte Berechnung des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ nach diesen Methoden ist es auch von Wert, daſs man leicht Korrektionsglieder angeben kann, die in vielen Fällen eine Erhöhung der Genauigkeit oder eine Abschätzung des Fehlers ermöglichen. Vorausgesetzt wird dabei, daſs die Funktion $f(x)$ nebst einigen ihrer ersten Ableitungen stetig ist, so daſs man wenigstens bis zu einer gewissen Stelle die Taylorsche Entwickelung anwenden kann. Nur für die Simpsonsche Regel, als der schon ohnehin zweckmäſsigsten Methode, will ich dasselbe kurz ableiten. Für einen Doppelstreifen wird:

$$F = F(x + 2h) - F(x) = 2hf(x) + 2h^2f'(x) + \frac{4}{3}h^3f''(x) + \frac{2}{3}h^4f'''(x) + \frac{4}{15}h^5f^4(x) + \cdots$$

$$F_4 = \frac{1}{3}(M + 2m) = \frac{1}{3}h[f(x) + 4f(x + h) + f(x + 2h)].$$

Entwickelt man die Differenz $F_4 - F$ nach Potenzen von h, so wird das Anfangsglied derselben gleich:

$$\frac{1}{90}h^5f^4(x) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{180}h^4[f^3(x + 2h) - f^3(x)].$$

Ist also die gesamte Breite der in $2n$ Streifen zerlegten Fläche gleich $b - a = 2nh$, so wird hier die obere Grenze des Fehlers durch

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{180}(b-a)\,h^4 f^4(x_\mu) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{180} h^4 [f^3(b) - f^3(a)]$$

dargestellt, wobei $f^4(x_\mu)$ den Maximalwert der vierten Ableitung im ganzen Intervalle bedeutet.

546. Numerisches Beispiel. Wir betrachten für den Vergleich der vier Methoden als Beispiel folgenden einfachen Fall. Die von der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ begrenzte Fläche hat, während x von 1 bis 2 variiert, den Wert:

$$F = \int_1^2 \frac{dx}{x} = l2 = 0{,}69314718.$$

Teilt man das Intervall von 1 bis 2 in zehn gleiche Teile und berechnet die dazu gehörigen Ordinaten, so wird

$$g = 3{,}45953943, \qquad u = 2{,}72817460.$$

Nach der Trapezregel ist:

$F_3 = 0{,}69377140$, die Differenz $F_3 - F = +\,0{,}00062422$.

Nach der Ponceletschen Formel ist:

$F_1 = 0{,}69352272$, die Differenz $F_1 - F = +\,0{,}00037554$.

Nach der Parmentierschen Formel ist:

$F_2 = 0{,}69298444$, die Differenz $F_2 - F = -\,0{,}00016274$.

Nach der Simpsonschen Formel ist:

$F_4 = 0{,}69315023$, die Differenz $F_4 - F = +\,0{,}00000305$.

Fügt man dem Werte von F_4 das Korrektionsglied hinzu, so wird der verbesserte Wert:

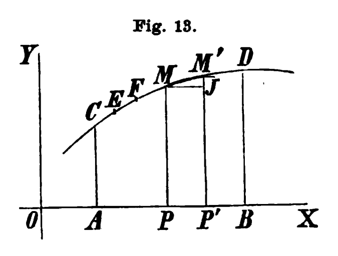
$$F_4' = 0{,}69314710, \quad \text{also} \quad F_4' - F = -\,0{,}00000008.$$

§ 3. Die Rektifikation der Kurven.

547. Begriff der Bogenlänge einer ebenen Kurve. Wir haben bereits in Nr. 193 die Bogenlänge einer ebenen Kurve eingeführt, indem wir wegen einer genaueren Definition dieses Begriffes auf die Integralrechnung verwiesen. Wir wollen jetzt das dort gegebene Versprechen einlösen und uns fragen, was

eigentlich unter der Bogenlänge einer ebenen Kurve verstanden sein soll. Ist CD (Fig. 13) die fragliche Kurve, so sagten wir früher, daſs die Länge des Bogens CD durch die eines Fadens gemessen wird, welcher längs CD an die Kurve gespannt wird. Allein um diese Messung auszuführen müssen wir den Faden gerade biegen und längs eines Lineals ausspannen, so daſs die Kurvenstrecke CD in eine gerade Linie umgebogen wird. Fragen wir aber weiter: Was ist 'Biegen'?, so kann die Antwort nur diese sein:

Fig. 13.



Zwei Kurvenstücke können dann und nur dann durch Biegung in einander übergeführt werden, wenn sie gleiche Länge haben.

Wir sehen also, daſs die Einführung der Biegung zu einem Zirkel führt und daſs es erforderlich ist, die Bogenlänge unabhängig von diesem Begriffe zu erklären. Wir verfahren um dies zu thun ähnlich wie beim Flächeninhalt und erklären die Bogenlänge als den Grenzwert des Umfanges von gewissen Polygonen in ganz ähnlicher Weise, wie dies in der Elementarmathematik geschieht, wenn der Umfang des Kreises definiert wird.

Wir beziehen unsere Kurve auf rechtwinklige Koordinaten (x, y) und es sei $y = f(x)$ ihre Gleichung. In Gemäſsheit der Voraussetzungen der Nr. 193 nehmen wir an, daſs $f(x)$ und $f'(x)$ in dem betrachteten Intervalle stetige Funktionen sind. Schreibt man dem Bogen CD eine gebrochene Linie $CEFMM'D$ ein, welche aus n Geraden besteht und bezeichnet man mit P die Länge dieses Polygons, mit x, y die Koordinaten eines Eckpunktes M und mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Koordinaten des folgenden Eckpunktes M', so ist:

$$MM' = \sqrt{MJ^2 + JM'^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Nun ist nach dem Mittelwertsatze (Nr. 28):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \vartheta \Delta x), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

also:

$$MM' = \Delta x \sqrt{1 + f'(x + \vartheta \Delta x)^2}.$$

Da aber die Quadratwurzel unter den gemachten Voraussetzungen sich stetig mit Δx ändert, so folgt:

$$(1) \qquad \sqrt{1+f'(x+\vartheta\Delta x)^2} = \sqrt{1+f'(x)^2} + \varepsilon.$$

Dabei erhält ε für $\Delta x = 0$ den Grenzwert 0 so, daſs, wenn σ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, man Δx immer so klein wählen kann, daſs

$$|\varepsilon| < \sigma$$

wird, welches auch der Wert von x in dem fraglichen Intervalle sein mag.

Die Formel (1) bezieht sich auf jede Seite des Polygons, wenn man für x die Abscissen der aufeinander folgenden Ecken wählt. Bildet man also die Summe aller Seiten wie MM', so ist die Länge des Polygons:

$$(2) \qquad P = S\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\Delta x + S\varepsilon\Delta x.$$

Läſst man nun die Zahl n der Seiten unbegrenzt wachsen und die Länge jeder Seite nach 0 konvergieren, so wird, da $S\Delta x$ einen endlichen konstanten Wert hat, der gleich der Abscissenlänge AB des Bogens CD ist, für hinreichend groſses n:

$$(3) \qquad |S\varepsilon\Delta x| < \sigma\cdot AB$$

und der Grenzwert dieses Ausdruckes wird daher gleich null. Andrerseits bekommt, da $\sqrt{1+f'(x)^2}$ eine stetige Funktion von x ist:

$$S\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\Delta x$$

nach Nr. 408 einen bestimmten, endlichen Grenzwert, der nichts anderes ist als das Integral von $\sqrt{1+f'(x)^2}$, genommen zwischen den Grenzen $OA = x_0$ und $OB = x$.

Also folgt aus (2) als Definition der Länge s des Bogens $\widehat{CD}$:

$$(4) \qquad s = \lim P = \int_{x_0}^{x}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Durch Differentiation nach der oberen Grenze x folgt:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+f'(x)^2}$$

oder, wenn man $\frac{dy}{dx}$ für $f'(x)$ schreibt und das positive Zeichen der Wurzel durch absolute Betragstriche andeutet:

$$(5) \qquad \frac{ds}{dx} = \left| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right|,$$

wie der Satz der Nr. 193 behauptete.

Führt man Polarkoordinaten ein, so wird nach Nr. 205:

$$ds = \sqrt{\varrho^2 d\omega^2 + d\varrho^2},$$

und daher:

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int ds = \int \sqrt{\varrho^2 d\omega^2 + d\varrho^2} = \int \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}\, d\omega.$$

Die Grenzen sind dabei durch die Werte von ω gegeben, welche den Punkten C und D des Bogens $\widehat{CD}$ entsprechen.

Sind hingegen x und y als Funktionen eines Parameters t gegeben, so wird:

$$ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

und daher

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$

wo die Grenzen durch die Werte von t gegeben sind, die den Endpunkten C und D des Bogens $\widehat{CD}$ entsprechen.

548. Das Verhältnis eines Bogens zu seiner Sehne hat den Grenzwert 1. Die Gleichung (5) der vorigen Nummer haben wir in Nr. 193 mit Hülfe des Satzes abgeleitet, daſs das Verhältnis des Kurvenbogens zu seiner Sehne den Grenzwert 1 erhält, wenn dessen Endpunkte sich einander unbegrenzt nähern. Hier in der Integralrechnung werden wir nun diesen Satz beweisen und zwar gerade auf Grund der Gleichung (5) der vorigen Nummer. Den Betrachtungen der Nr. 193 kommt mithin nur der Charakter einer Verifikation zu.

Ist nämlich der Bogen $\widehat{MM'} = \Delta s$ und die Länge der zugehörigen Sehne $\overline{MM'} = c$, so wird:

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

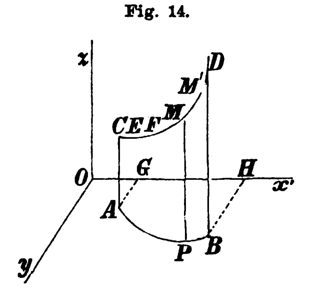
und geht man zur Grenze über, so wird:

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1,$$

wie behauptet war.

549. Die Bogenlänge einer Raumkurve. In derselben Weise wie bei den ebenen Kurven haben wir auch bei den Raumkurven vorzugehen. Es sei $\widehat{CD}$ der Bogen einer beliebigen Raumkurve, die wir auf drei rechtwinklige Axen OX, OY, OZ beziehen. Dem Bogen $\widehat{CD}$ schreiben wir ein Polygon $CEFMM'D$ ein, dessen Seitenzahl n sei. Wir bezeichnen mit P den Umfang dieses Polygons, mit x, y, z die Koordinaten irgend eines Eckpunktes M, mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die Koordinaten des folgenden Eckpunktes M'. Alsdann ist, wenn wir uns gleich allgemein x, y, z als Funktionen eines Parameters t gegeben denken:

Fig. 14.



$$\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

Die Verhältnisse

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

mögen nach den Grenzen:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

konvergieren und in Gemäfsheit der Voraussetzungen der Nr. 257 wollen wir annehmen, dafs x, y, z und ihre ersten

Ableitungen in dem betrachteten Intervalle stetige Funktionen von t sind. Alsdann wird:

$$MM' = \Delta t\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} + \varepsilon\right].$$

ε bedeutet dabei eine Funktion von t und Δt, welche für $\Delta t = 0$ den Grenzwert 0 erhält so, daſs man zu einer beliebig kleinen positiven Zahl σ immer ein so kleines Δt finden kann, daſs

$$|\varepsilon| < 0$$

wird, welches auch der Wert von t in dem Intervalle sein mag. Bildet man also die Summe P aller Polygonseiten, so ist

$$(1) \qquad P = S\Delta t\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\right] + S\varepsilon\Delta t.$$

Dabei ist für hinreichend kleine Δt:

$$|S\varepsilon\Delta t| < \sigma \cdot S\Delta t = \sigma(t_1 - t_0),$$

wenn t_0 und t_1 die Werte des Parameters t bedeuten, welche den Endpunkten C und D des Bogens $\widehat{CD}$ entsprechen. Läſst man nun die Zahl der Polygonseiten unbegrenzt wachsen und dabei jede Seite nach 0 konvergieren, so wird σ beliebig klein und daher

$$\lim S\varepsilon\Delta t = 0.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite in (1) konvergiert aber, da $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ eine stetige Funktion von t ist, gegen einen bestimmten Grenzwert, welcher nichts Anderes als das zwischen den Grenzen t_0 und t_1 genommene Integral der Quadratwurzel ist. Wir erhalten also aus (1) als Definition für den Bogen $\widehat{CD}$ unserer Raumkurve:

$$(2) \qquad s = \lim P = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Durch Differentiation entsteht hieraus die Gleichung der Nr. 257:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so wird nach Nr. 258:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2}$$

und es folgt durch Integration, wenn r, θ, ψ als Funktionen von t gegeben sind:

$$(3)\quad s = \int \frac{ds}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\,dt.$$

550. Der Satz der Nr. 548 gilt auch für eine Raumkurve. Genau wie in Nr. 549 bei ebenen Kurven zeigt man, dafs auch für Raumkurven der Satz gilt:

Der Quotient aus Kurvenbogen und Sehne erhält bei unbegrenzt abnehmender Entfernung der Endpunkte den Grenzwert 1.

Ist nämlich c die Sehne eines Bogens MM' und Δs die Bogenlänge MM', so wird:

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}$$

und folglich für $\Delta t = 0$:

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \frac{\dfrac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}} = 1,$$

wie in Nr. 257 bereits behauptet war.

551. Rektifikation der Ellipse und Hyperbel. Wir betrachten eine Ellipse, deren halbe grofse Axe zur Längeneinheit gewählt ist und deren Excentricität gleich k ist. Die rechtwinkligen Koordinaten der Kurve in Bezug auf ihre Axen werden (Nr. 222) $\sin\varphi$, $\sqrt{1-k^2}\cos\varphi$ und das Differential des Bogens wird $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$. Bezeichnet man also mit Legendre durch $E(\varphi)$ die Länge eines Ellipsenbogens, gerechnet von einem der Endpunkte der kleinen Axe, wo der Winkel φ null ist, bis zu einem Punkte, der zu irgend einem Werte von φ gehört, so ist

$$(1) \qquad E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

wofür man nach Nr. 222 auch schreiben kann:

$$(2) \qquad E(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Betrachtet man nun zugleich eine Hyperbel, deren transversale Halbaxe k und deren andere Axe $\sqrt{1 - k^2}$ ist, so können die Koordinaten der Kurve in Bezug auf diese Axen durch $(1 - k^2) \operatorname{tang} \varphi$ und $\frac{k\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$ dargestellt werden (Nr. 223). Bezeichnet man also mit $\Upsilon(\varphi)$ den Bogen der Hyperbel, gerechnet von dem Scheitelpunkte, für welchen $\varphi = 0$ ist, und begrenzt durch einen Punkt, der zu irgend einem Werte von φ gehört, so ist

$$(3) \qquad \Upsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{(1 - k^2)\, d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

wofür man auch schreiben kann (Nr. 221):

$$(4) \qquad \Upsilon(\varphi) = k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Die Gleichungen (2) und (4) zeigen, daſs der Ellipsenbogen $E(\varphi)$ und der Hyperbelbogen $\Upsilon(\varphi)$ sich durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken lassen, und daſs auch umgekehrt diese elliptischen Integrale vermittelst des Ellipsen- und des Hyperbelbogens ausgedrückt werden können. Dabei hat man sich zu erinnern, daſs der algebraische Teil $\operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ gleich ist der Länge der Tangente, die im Endpunkte des Bogens $\Upsilon(\varphi)$ errichtet und durch den Fuſspunkt des Lotes vom Mittelpunkt auf die Tangente begrenzt ist (Nr. 223).

Legendre hat mit $F(\varphi)$ das elliptische Integral erster Gattung bezeichnet; also ist

$$(5)\qquad F(\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wenn man zur Abkürzung wie in Nr. 452

$$(6)\qquad \Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

setzt. Zugleich hat der berühmte Mathematiker als Funktion zweiter Gattung den Bogen der Ellipse $E(\varphi)$ gewählt, und daher rührt die Bezeichnung *„elliptische Integrale“* für diese Transscendenten. Die Gleichung (2) giebt:

$$(7)\qquad \int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}=\frac{1}{k^2}[F(\varphi)-E(\varphi)],$$

so dafs also die Funktion, welche wir früher der Bildung von Integralen zweiter Gattung zu Grunde gelegt haben, sich mittelst des Ellipsenbogens und des Integrales erster Gattung ausdrücken läfst.

Die Gleichung (4) liefert, wenn man die Formel (2) benutzt:

$$(8)\qquad \Upsilon(\varphi)=(1-k^2)F(\varphi)-E(\varphi)+\Delta\varphi\,\text{tang}\,\varphi.$$

552. Reihenentwickelung der erhaltenen Integrale. Die Bogen der Ellipse und der Hyperbel, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Funktionen $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ lassen sich in Reihen entwickeln (Nr. 447). Denn es ist nach der Binomialformel

$$\frac{1}{\Delta\varphi}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\varphi+\cdots,$$

$$\Delta\varphi=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot4}k^4\sin^4\varphi-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\varphi-\cdots;$$

also

$$(9)\qquad \begin{cases} F(\varphi)=\varphi+\frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\int_0^\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\int_0^\varphi\sin^6\varphi\,d\varphi+\cdots,\\ E(\varphi)=\varphi-\frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2\cdot4}k^4\int_0^\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6\int_0^\varphi\sin^6\varphi\,d\varphi-\cdots \end{cases}$$

Diese Reihen sind immer konvergent, weil $k < 1$ ist, und überdies werden wir später sehen, daſs man diesen Modul stets beliebig klein machen kann. Die erste Gleichung haben wir schon in Nr. 447 aufgestellt; die Integrale, welche hier auftreten, sind durch die Gleichungen der Nr. 462 gegeben.

Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so werden die Funktionen $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ die *vollständigen Integrale* erster und zweiter Gattung nach Legendre; wir bezeichnen sie mit F_1 und E_1. Es ist Nr. 477:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\,\frac{\pi}{2};$$

$$(10)\quad \begin{cases} F_1 = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 3k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 5k^6 + \cdots\right], \\ E_1 = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 3k^4 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 5k^6 - \cdots\right]. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung giebt die Länge des Quadranten einer Ellipse, deren Excentricität k, und deren halbe groſse Axe zur Längeneinheit gewählt ist.

§ 4. Die Landensche Transformation der elliptischen Integrale.

553. Die Transformationsgleichung. Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der elliptischen Integrale erster Gattung ist die, daſs sich jede dieser Funktionen auf unendlich viele verschiedene Weisen in eine andere Funktion derselben Gattung transformieren läſst, deren Modul nach Belieben entweder kleiner oder gröſser ist als der Modul des ursprünglichen Integrales. Hieraus folgt, daſs man verschiedene Reihen von Moduln bilden kann, unendlich nach beiden Seiten, deren Glieder sich bezüglich der Null und der Einheit nähern, und welche zu elliptischen Integralen erster Gattung gehören, die unter sich gleich sind. Wir beabsichtigen nicht, hier eine Entwickelung der wichtigen *Transformationstheorie* der elliptischen Integrale zu geben; doch halten wir es für nützlich, die erste Stufenreihe der Moduln aufzustellen, welche von Legendre entdeckt

wurde; denn daraus können wir den merkwürdigen Landenschen Satz über Hyperbelbogen ableiten.

Es sei k eine gegebene Gröfse zwischen 0 und 1, φ ein variabeler Winkel, $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, wobei die Wurzel mit dem positiven Zeichen genommen wird. Man kann einen Winkel φ_1 bestimmen, welcher den beiden Gleichungen genügt:

$$\text{(1)} \qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi, \qquad \cos(2\varphi_1 - \varphi) = \Delta\varphi,$$

und welcher sich aufserdem stetig mit φ ändert und gleichzeitig mit φ null wird. Da $\Delta\varphi$ positiv ist, so bleibt $2\varphi_1 - \varphi$ immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man also mit Φ den Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, dessen Sinus gleich $k\sin\varphi$ ist, so wird:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \Phi}{2},$$

so dafs φ_1 unzweideutig bestimmt ist, sobald φ gegeben ist; umgekehrt ist auch der Wert von φ vollkommen bestimmt, sobald φ_1 gegeben ist. Diese beiden Winkel variieren gleichzeitig von 0 bis $+\infty$, oder von 0 bis $-\infty$. Ist $\varphi = \pi$, so ist $\Phi = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Addiert man die beiden Gleichungen, nachdem man sie mit $-\sin\varphi$ und $+\cos\varphi$, ferner mit $+\cos\varphi$ und $+\sin\varphi$ multipliziert hat, so folgt:

$$\cos 2\varphi_1 = \cos\varphi\,\Delta\varphi - k\sin^2\varphi,$$
$$\sin 2\varphi_1 = \sin\varphi\,(k\cos\varphi + \Delta\varphi);$$

also:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} 2\cos^2\varphi_1 = 1 - k\sin^2\varphi + \cos\varphi\,\Delta\varphi, \\ 2\sin^2\varphi_1 = 1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\,\Delta\varphi, \\ 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sin\varphi\,(k\cos\varphi + \Delta\varphi). \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (1) ergiebt auch:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{k + \cos 2\varphi_1},$$

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tang}\varphi_1,$$

und setzt man

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad \Delta_1\varphi_1 = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi_1},$$

so erhält man noch:

$$(5) \qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{2}{1+k}\,\dfrac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \\[2ex] \cos\varphi = \dfrac{1 - \dfrac{2}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \\[2ex] \Delta\varphi = \dfrac{1 - \dfrac{2k}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus der ersten der Gleichungen (1) durch Differentiation, wenn man dabei die zweite berücksichtigt:

$$\frac{2\,d\varphi_1}{k\cos\varphi + \Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

oder auf Grund der dritten Gleichung (2) und der ersten Gleichung (5):

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1+k}{2}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Weil nun φ und φ_1 gleichzeitig null werden, so erhält man:

$$(6) \qquad \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1+k}{2}\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Dies ist die wichtige von Legendre entdeckte Gleichung. Setzt man nun

$$F(k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad F(k_1,\varphi_1) = \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1},$$

so ergiebt die Gleichung (6):

$$(7) \qquad F(k_1,\varphi_1) = \frac{1+k}{2} F(k,\varphi).$$

Bezeichnen wir noch mit $F_1(k)$ und $F_1(k_1)$ die vollständigen Funktionen der Moduln k und k_1, so wird, da für $\varphi = \pi$ der Winkel $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ist und da $F(k,\pi) = 2F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = 2F_1(k)$ ist:

$$(8) \qquad F_1(k_1) = (1+k)\,F_1(k).$$

554. Produktentwickelung des vollständigen Integrales erster Gattung. Die Moduln k und k_1 können, wie wir sahen, auf einander zurückgeführt werden, sie sind durch die Relation

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \tag{9}$$

verbunden. Bezeichnet man mit k', k_1' die komplementären Moduln von k und k_1, d. h. $\sqrt{1-k^2}$ und $\sqrt{1-k_1^2}$, so erhält man

$$k_1' = \frac{1-k}{1+k} = \frac{k'^2}{(1+k)^2} < k'^2 \tag{10}$$

und

$$k = \frac{1-k_1'}{1+k_1'} = \frac{k_1^2}{(1+k_1')^2} < k_1^2. \tag{11}$$

Hieraus folgt, daſs in der nach beiden Seiten unendlichen Reihe:

$$\cdots k_{-2},\ k_{-1},\ k_0,\ k_1,\ k_2,\ \cdots, \tag{12}$$

in welcher das Glied $k_0 = k$ kleiner als 1 ist, und jedes Glied aus dem vorhergehenden mittelst der Gleichung

$$k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1+k_i} \tag{13}$$

und aus dem folgenden mittelst der Gleichung

$$k_{i-1} = \frac{k_i^2}{(1+k_i')^2} = \frac{1-k_i'}{1+k_i'} \tag{14}$$

zu berechnen ist, das Glied k_m nach der Einheit konvergiert, wenn m positiv unendlich wird, und nach null, wenn m negativ unendlich wird. Man kann also ein elliptisches Integral erster Gattung $F(k, \varphi)$ auf ein anderes $F(k_i, \varphi_i)$ bringen, bei welchem der Modul k_i der Null oder der Einheit beliebig nahe kommt. Die Amplitude φ_i dieser neuen Funktion ist nach den oben aufgestellten Formeln zu berechnen.

Wir betrachten z. B. das vollständige Integral $F_1(k)$; nach Gleichung (8) erhält man:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (1+k_{-1})\,F_1(k_{-1}) \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2})\,F_1(k_{-2}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2})\cdots(1+k_{-i})\,F_1(k_{-i}). \end{aligned}$$

Wenn nun i unendlich grofs wird, so wird k_{-i} null und $F_1(k_{-i})$ konvergiert nach der Grenze $\frac{\pi}{2}$; man bekommt also die folgende bemerkenswerte Entwickelung für die vollständige Funktion $F_1(k)$:

$$(15) \qquad F_1(k) = \frac{\pi}{2}(1 + k_{-1})(1 + k_{-2})(1 + k_{-3}) \cdots$$

555. Die Rektifikation der Hyperbel ist der der Ellipse äquivalent. Die behandelte Transformation führt auch zu wichtigen Resultaten für die Integrale zweiter Gattung. Multipliziert man die Gleichung

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1} = \frac{1+k}{2} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

mit $\sin^2 \varphi_1$, so erhält man vermittelst der Gleichungen (2):

$$\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1} = \frac{k(1+k)}{4} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1+k}{4}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1+k}{4}\cos\varphi\, d\varphi,$$

und durch Integration:

$$(16) \left\{ \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{k(1+k)}{4}\int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1+k}{4}F(k,\varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi. \right.$$

An Stelle der Integrale zweiter Gattung führen wir die Ellipsenbogen $E(k, \varphi)$ und $E_1(k_1, \varphi_1)$ ein; es ist (Nr. 551):

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}[F(k,\varphi) - E(k,\varphi)],$$

$$\int\limits_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1}{k_1^2}[F(k_1,\varphi_1) - E(k_1,\varphi_1)].$$

Die Gleichung (16) wird demnach, indem man noch die Gleichung (7) benutzt:

$$(17) \quad (1+k)E(k_1,\varphi_1) = E(k,\varphi) - \frac{1}{2}k'^2 F(k,\varphi) + k\sin\varphi.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs das elliptische Integral erster Gattung sich durch zwei Kurvenbogen ausdrücken läfst, die zu zwei verschiedenen Ellipsen gehören.

Der Hyperbelbogen ist, wie wir in Nr. 551 sahen, durch die Gleichung

$$\Upsilon(k, \varphi) = k'^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi) + \operatorname{tang}\varphi\, \Delta\varphi$$

gegeben. Eliminiert man hier die Funktion F vermittelst der Gleichung (17), so folgt:

$$(18) \quad \Upsilon(k,\varphi) = E(k,\varphi) - 2(1+k)E(k_1,\varphi_1) + 2k\sin\varphi + \operatorname{tang}\varphi\,\Delta\varphi.$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung diejenige, welche man erhält, indem man φ und φ_1 in Φ und Φ_1 verwandelt, so drückt die resultierende Gleichung den Satz aus, welcher vor mehr als einem Jahrhundert von dem englischen Mathematiker Landen entdeckt wurde, *daſs nämlich jeder Bogen einer Hyperbel durch zwei Ellipsenbogen dargestellt werden kann. Umgekehrt kann auch jeder Bogen einer Ellipse durch zwei Hyperbelbogen dargestellt werden.* Dieser Satz läſst sich leicht aus den oben entwickelten Gleichungen ableiten.

556. Eine Relation zwischen den Umfängen dreier Ellipsen. Nimmt man in der Gleichung (17) $\varphi = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ an, so erhält man die folgende Relation zwischen den vollständigen Integralen:

$$(1 + k)\, E_1(k_1) = 2E_1(k) - k'^2 F_1(k).$$

Ersetzt man k, k' und k_1 zuerst durch k_i, k_i' und k_{i+1}, sodann durch k_{i-1}, k_{i-1}', k_i, so wird:

$$(1 + k_i)\, E_1(k_{i+1}) = 2E_1(k_i) - k_i'^2 F_1(k_i),$$
$$(1 + k_{i-1})\, E_1(k_i) = 2E_1(k_{i-1}) - k_{i-1}'^2 F_1(k_{i-1}).$$

Die Moduln k_{i-1}, k_i, k_{i+1} sind als Funktionen des ursprünglichen Moduls k_0 oder k bestimmt, wie in Nr. 554 gezeigt st. Nun ist auch (Nr. 553)

$$F_1(k_i) = (1 + k_{i-1})\, F_1(k_{i-1}),$$

Eliminiert man also die Funktion F_1 zwischen den beiden obigen Gleichungen und ersetzt man k_{i-1}, k_{i-1}' durch die ihnen gleichen Gröſsen $\frac{1-k_i'}{1+k_i'}$, $\frac{2\sqrt{k_i'}}{1+k_i'}$, so folgt:

$$(19) \quad k_i'(1+k_i')E_1(k_{i-1}) - (2+k_i')E_1(k_i) + (1+k_i)E_1(k_{i+1}) = 0,$$

eine bemerkenswerte Relation zwischen den Umfängen dreier Ellipsen mit den Excentricitäten k_{i-1}, k_i, k_{i+1}.

§ 5. Über die algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch Kreisbogen darstellen lassen.

557. Stellung des Problems und seine Lösung für eine gewisse Klasse von Kurven. Die Untersuchung der algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch Kreisbogen ausdrücken lassen, bietet ein gewisses Interesse vom geometrischen Standpunkte aus dar, denn bei diesen Kurven kann man, wie beim Kreise, alle Konstruktionen ausführen, die sich auf die Addition oder Subtraktion der Bogen, auf ihre Multiplikation und ihre Division beziehen. Euler hat sich viel mit dieser Untersuchung beschäftigt, und in einer Abhandlung, die aber erst nach seinem Tode publiziert wurde, giebt er eine Familie von Kurven an, welche die fragliche Eigenschaft besitzen; er hat dieselbe, wie er sagt, erst nach langer Arbeit über diesen Gegenstand gefunden.

Die von Euler entdeckten Kurven bilden nur einen sehr speziellen Fall derjenigen, bei welchen sich der beliebig begrenzte Bogen durch einen Kreisbogen ausdrücken läfst, und bei denen die geradlinigen Koordinaten rationale Funktionen der trigonometrischen Tangente dieses Bogens sind. Alle diese Kurven habe ich in einer Abhandlung im 25. Bande des Journal de l'Ecole Polytechnique bekannt gemacht, und bewiesen, dafs sie eine unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener Klassen bilden, von denen jede wiederum unendlich viele Kurven enthält. Hier will ich mich nur darauf beschränken, die Lösung des einfachsten Falles auszuführen, welcher die Kurven der ersten Klasse umfasst.

Bezeichnet man mit i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, mit g eine positive Gröfse, mit ω einen reellen Winkel, mit e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes, und setzt man ferner

$$t = (z-a)^{n+1}(z-b)^{p+1}(z-c)^{q+1}\cdots,$$
$$\tau = (z-\alpha)^{n+1}(z-\beta)^{p+1}(z-\gamma)^{q+1}\cdots,$$

wobei a und α, b und β, c und γ ... konjugiert komplexe Konstanten und m, n, p ... positive ganze Zahlen sind, so ist die allgemeine Lösung des vorgelegten Problemes durch die Gleichung:

$$(1)\qquad x + iy = ge^{i\omega}\int \frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}\,dz$$

gegeben, wofern die Konstanten $a, b, c \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$ so gewählt sind, dafs dieses Integral eine algebraische Funktion wird. Denn es wird:

$$dx + i\,dy = ge^{i\omega}\frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

und wenn man i in $-i$ verwandelt:

$$dx - i\,dy = ge^{-i\omega}\frac{\tau}{t}\,\frac{(z+i)^m}{(z-i)^{m+2}}\,dz.$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{g^2dz^2}{(z^2+1)^2}, \quad \text{also} \quad \sqrt{dx^2+dy^2} = g\,\frac{dz}{1+z^2}$$

und

$$\int_0^z \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}\,dz = g \operatorname{arc\,tang} z.$$

Da die Ordnung des Zählers in dem Quotienten

$$\frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}$$

um zwei Einheiten kleiner ist als die des Nenners, so genügt es, wenn μ die Anzahl der Konstanten $a, b, c \ldots$ oder $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bezeichnet, μ Bedingungen zu erfüllen (Nr. 431), damit der Ausdruck von $x + iy$ algebraisch wird.

Wenn t und τ sich auf die Einheit reduzieren, so giebt unsere Gleichung keine andere Kurve als den Kreis. Der einfachste Fall ist dann der, dafs

$$t = (z-a)^{n+1}, \qquad \tau = (z-\alpha)^{n+1}$$

gesetzt wird. Die Gleichung (1) wird alsdann:

$$(2)\qquad x + iy = ge^{i\omega}\int \frac{(z-a)^{n+1}(z-i)^m}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

und es ist nur eine einzige Bedingung zu erfüllen, damit das Integral eine algebraische Funktion wird. Um dieselbe auf die einfachste Weise zu erhalten, bezeichnen wir mit u eine neue Variabele, und setzen

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{a-i}{a+i} u,$$

und sodann zur Abkürzung:

$$\eta = \frac{(a+i)(\alpha-i)}{(a-i)(\alpha+i)}. \tag{3}$$

Es wird:

$$\frac{dz}{(z+i)^2} = \frac{1}{2i} \frac{a-i}{a+i} du,$$

$$\frac{(z-i)^m dz}{(z+i)^{m+2}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{a-i}{a+i}\right)^{m+1} u^m du \quad \text{und} \quad \frac{z-a}{z-\alpha} = \frac{a+i}{\alpha+i}\frac{u-1}{u-\eta}.$$

Also wird die Gleichung (2):

$$x + iy = A\int \frac{u^m (u-1)^{n+1} du}{(u-\eta)^{n+1}},$$

wobei

$$A = \frac{g}{2i} e^{i\omega} \left(\frac{a+i}{\alpha+i}\right)^{n+1} \left(\frac{a-i}{a+i}\right)^{m+1}.$$

Damit $x + iy$ eine algebraische Funktion von u oder z wird, mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{d^n \eta^m (\eta-1)^{n+1}}{d\eta^n} = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung ist in η vom Grade $m+1$; eine ihrer Wurzeln ist gleich 1, und wenn n kleiner ist als m, so sind $m-n$ Wurzeln gleich null. Die Anzahl der von 0 und 1 verschiedenen Wurzeln ist also gleich der kleineren unter den Zahlen m und n. Man erkennt, dafs alle diese Wurzeln reell, ungleich und zwischen 0 und 1 enthalten sind, indem man n mal nach einander den Satz von **Rolle** auf die Gleichung

$$\eta^m (\eta - 1)^{n+1} = 0$$

anwendet, welche m gleiche Wurzeln null und $n+1$ gleiche Wurzeln 1 hat. Die Wurzeln null der Gleichung (4) geben keine Lösung der Aufgabe, denn für $\eta = 0$ wird nach Gleichung (3) $a = -i$ oder $\alpha = +i$; aber die eine dieser Gleichungen enthält auch die andere, weil a und α konjugiert sind. Die Faktoren $z-a$, $z-\alpha$ werden $z+i$, $z-i$; folglich kommt man auf den Fall zurück, dafs die Polynome t und τ sich auf die Einheit reduzieren. Für $\eta = 1$ wird $a = \alpha$, und die Gleichung (2) reduziert sich wiederum auf eine solche, in welcher $t = \tau = 1$ ist.

Jede der Wurzeln η aber, welche zwischen 0 und 1 enthalten ist, führt zu komplexen und konjugierten Werten von a und α. Wir bemerken zunächst, dafs man

$$(5) \qquad a\alpha = 1$$

annehmen kann, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beschränken. Denn man kann jeden andern Fall durch eine Änderung der Variabelen auf diesen bringen. Setzt man nämlich $\frac{z+\varepsilon}{1-\varepsilon z}$ an Stelle von z, indem man für ε eine Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^2 + 2\frac{a+\alpha}{a\alpha - 1}\varepsilon - 1 = 0$$

wählt, so erhält die Gleichung (2) durch diese Transformation die Form:

$$x + iy = ge^{i\omega}\int \frac{(z-a_1)^{n+1}(z-i)^m}{(z-\alpha_1)^{n+1}(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

wobei a_1 und α_1 die folgenden Werte bekommen:

$$a_1 = \frac{a-\varepsilon}{1+a\varepsilon}, \qquad \alpha_1 = \frac{\alpha-\varepsilon}{1+\alpha\varepsilon},$$

so dafs $a_1\alpha_1 = 1$ wird. Man kann demnach die Gleichung (5) einführen, und aus derselben folgt in Verbindung mit der Gleichung (3):

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} - \frac{1-\eta}{1+\eta}\,i, \\ \alpha &= \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} + \frac{1-\eta}{1+\eta}\,i. \end{aligned} \right.$$

Giebt man a und α diese Werte in der Gleichung (2), so wird der Ausdruck $x + iy$ algebraisch.

558. Die Eulerschen Kurven. Wir betrachten nun den Fall $m = 1$, welcher auf die Eulerschen Kurven führt. Die Gleichung (2) wird hier:

$$(7) \qquad x + iy = ge^{\omega i}\int \frac{(z-a)^{n+1}(z-i)}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^3}\,dz,$$

und die Bedingungsgleichung ist:

$$\frac{d^n \eta^1(\eta-1)^{n+1}}{d\eta^n} = 0;$$

aus derselben folgt, abgesehen von der Wurzel $\eta = 1$:

$$\eta = \frac{n}{n+2}.$$

Die Gleichungen (6) geben sodann die folgenden Werte für a und α:

$$(8) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} - \dfrac{i}{n+1}, \\[2ex] \alpha = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \dfrac{i}{n+1}. \end{cases}$$

Da nun das Integral in der Gleichung (7) eine algebraische Funktion sein mufs, so erkennt man weiter, dafs der Nenner derselben $(z-\alpha)^n (z+i)^2$ sein mufs. Bestimmt man ferner das Integral so, dafs es für $z = a$ null wird, so wird der Zähler teilbar durch $(z-a)^{n+2}$, und da derselbe nur vom Grade $n+2$ sein kann, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$x + iy = g e^{\omega i} \frac{(z-a)^{n+2}}{(z-\alpha)^n (z+i)^2} + \text{const.}$$

Da die Konstante nur auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems Einflufs hat, so können wir dieselbe gleich null annehmen und also setzen:

$$(9) \qquad x + iy = g e^{\omega i} \frac{(z-a)^{n+2}}{(z-\alpha)^n (z+i)^2},$$

wobei g und ω nicht die nämlichen Werte wie früher (Gleichung (7)) bedeuten. Die Gleichung der Kurven erhält man nun zwischen den geradlinigen Koordinaten, wenn man z aus der Gleichung (9) und aus derjenigen, welche durch Vertauschung von i in $-i$ hervorgeht, eliminiert; es ist indessen einfacher, Polarkoordinaten einzuführen und an Stelle der Elimination eine Integration zu setzen.

Differentiiert man die Gleichung (9), indem man die Formeln (8) benutzt, so folgt:

$$(10) \quad dx + i\,dy = \frac{2\sqrt{n(n+2)}}{n+1} g e^{i\omega} \frac{(z-a)^{n+1}(z-i)}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^3}\, dz.$$

Die Gleichung (9) enthält die Gleichung (10), was auch der Wert von n sein mag; wir können demnach diese Zahl

auch als eine gebrochene annehmen, denn die Kurve, welche durch die Gleichung (9) dargestellt wird, bleibt auch dann noch eine algebraische. Es erlangen mithin die folgenden Resultate eine Allgemeinheit, wie sie in unserer anfänglichen Aussage nicht enthalten war.

Multipliziert man jede der Gleichungen (9) und (10) mit ihrer konjugierten, so folgt:

$$x^2 + y^2 = g^2 \frac{(z-a)^2 (z-\alpha)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4n(n+2)}{(n+1)^2} g^2 \frac{dz^2}{(z-i)^2 (z+i)^2}.$$

Wir bezeichnen mit ϱ den Radiusvektor $\sqrt{x^2+y^2}$, mit ds das Differential des Bogens $\sqrt{dx^2+dy^2}$, und nehmen ds mit dem entgegengesetzten Zeichen wie dz, so wird:

$$\varrho = g \frac{z^2 - 2z \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + 1}{(z^2+1)},$$

$$ds = -2g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \frac{dz}{z^2+1},$$

und setzt man:

$$z = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right), \quad \text{also} \quad dz = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)},$$

so ergeben diese Formeln:

$$\varrho = g\left(1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda\right), \tag{11}$$

$$ds = g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} d\lambda. \tag{12}$$

Differentiiert man die erste Gleichung, so findet man:

$$d\varrho = -g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \sin\lambda \, d\lambda,$$

also:

$$\frac{d\varrho}{ds} = -\sin\lambda. \tag{13}$$

Bezeichnet ω die andere Polarkoordinate, so kann man

$$\varrho \frac{d\omega}{ds} = +\cos\lambda \tag{14}$$

setzen, weil $d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2 = ds^2$ ist. Also wird:

$$d\omega = \frac{ds \cos\lambda}{\varrho} = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda \, d\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda},$$

oder:

(15) $$d\omega = d\lambda - \frac{d\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda}.$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, benutzen wir eine neue Variabele λ', bestimmt durch die beiden Gleichungen:

(16) $$\cos\lambda' = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \cos\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda}, \qquad \sin\lambda' = \frac{\frac{1}{n+1} \sin\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n+1} \cos\lambda}.$$

Diese Gleichungen sind mit einander verträglich, denn es folgt aus ihnen $\cos^2\lambda' + \sin^2\lambda' = 1$. Indem man die zweite differentiiert, erhält man:

$$\cos\lambda' \, d\lambda' = \frac{1}{n+1} \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \cos\lambda}{\left(1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda\right)^2} d\lambda,$$

also gemäfs der ersteren:

$$(n+1) \, d\lambda' = \frac{d\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda};$$

folglich wird die Gleichung (15):

$$d\omega = d\lambda - (n+1) \, d\lambda'.$$

Integriert man dieselbe so, dafs ω zugleich mit λ und λ' verschwindet, so folgt:

(17) $$\omega = \lambda - (n+1) \lambda',$$

also:

(18) $$\cos\omega + i \sin\omega = (\cos\lambda + i \sin\lambda)(\cos\lambda' - i \sin\lambda')^{n+1}.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung:

(19) $$R = \sqrt{-\varrho^2 + 2g\varrho - \frac{g^2}{(n+1)^2}},$$

so wird nach der Gleichung (11):

$$(20)\quad \cos\lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{\varrho - g}{g}, \qquad \sin\lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{R}{g},$$

und also ergeben die Gleichungen (16):

$$(21)\quad \cos\lambda' = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1}}{\varrho}, \qquad \sin\lambda' = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{R}{\varrho}.$$

Man hat demnach:

$$\cos\lambda + i\sin\lambda = \frac{1}{g}\,\frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,(\varrho - g + iR),$$

$$\cos\lambda' - i\sin\lambda' = \frac{1}{\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\left[(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1} - iR\right],$$

und die Gleichung (18) wird schliefslich:

$$(22)\quad \begin{cases} \cos\omega + i\sin\omega = \\ = \dfrac{n+1}{g[\sqrt{n(n+2)}]^{n+2}}\,\dfrac{1}{\varrho^{n+1}}\left[(n+1)\varrho - \dfrac{g}{n+1} - iR\right]^{n+1}(\varrho - g + iR). \end{cases}$$

Diese Gleichung läfst sich in zwei zerlegen, durch welche $\cos\omega$ und $\sin\omega$ als Funktionen von ϱ gegeben werden. Jede derselben ist als Gleichung unserer Kurven in Polarkoordinaten zu betrachten. Multipliziert man die Gleichung mit ϱ, so erhält man:

$$(23)\quad x + iy = \frac{n+1}{g[\sqrt{n(n+2)}]^{n+2}}\,\frac{1}{\varrho^{n}}\left[(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1} - iR\right]^{n+1}(\varrho - g + iR).$$

Für den besonderen Fall, dafs n eine ganze Zahl ist, erhalten die Werte von x und y die Form:

$$x = \frac{F(\varrho)}{\varrho^n}, \qquad y = \frac{f(\varrho)}{\varrho^n}\,R;$$

F und f bezeichnen dabei ganze rationale Funktionen von ϱ.

559. Die Gleichung der Eulerschen Kurven in ihrer einfachsten Form. Im allgemeinen Falle ist die Gleichung (22) zu kompliziert, um zu einem weiteren Studium der dargestellten Kurven zu dienen; es ist dann vorteilhafter, das System der Gleichungen (11), (16) und (17) anzuwenden, wie dies Euler gethan hat.

Wählt man die Gröſse $\frac{g\sqrt{n(n+2)}}{n+1}$ zur Einheit, so reduzieren sich die Gleichungen (11) und (12) auf

$$\varrho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos\lambda, \qquad ds = d\lambda,$$

und hieraus folgt, indem man die Bogen von $\lambda = 0$ an rechnet:

$$s = \lambda,$$

$$\varrho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos s,$$

als allgemeine Gleichung unserer Kurven zwischen der Bogenlänge und dem Radiusvektor. Diese Resultate stimmen mit den von Euler erhaltenen überein.

Für den Fall $n = 1$ wird die Gleichung (22), wenn man $\frac{g}{2}$ zur Einheit wählt:

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\varrho - 2 + iR)(2\varrho - 1 - iR)^2}{3\varrho^2\sqrt{3}},$$

und es ist:

$$R = \sqrt{-\varrho^2 + 4\varrho - 1}.$$

Hieraus folgt, daſs die zum Werte $n = 1$ gehörige Kurve durch jede der beiden Gleichungen dargestellt ist:

$$\cos\omega = \frac{\varrho^3 + 6\varrho - 2}{3\varrho^2\sqrt{3}},$$

$$\sin\omega = \frac{(\varrho^2 + 2\varrho - 2)\sqrt{-\varrho^2 + 4\varrho - 1}}{3\varrho^2\sqrt{3}}.$$

Für den Fall $n = 2$ wird die Gleichung (22), indem man $\frac{g}{3}$ zur Einheit wählt:

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\varrho - 3 + iR)(3\varrho - 1 - iR)^3}{64\varrho^3},$$

und es ist:

$$R = \sqrt{-\varrho^2 + 6\varrho - 1}.$$

Hieraus folgt, daſs die zum Werte $n = 2$ gehörige Kurve durch jede der beiden Gleichungen dargestellt ist:

$$\cos\omega = \frac{\varrho^4 + 14\varrho^2 - 8\varrho + 1}{8\varrho^3},$$

$$\sin\omega = \frac{(\varrho - 1)(\varrho^2 + 4\varrho - 1)\sqrt{-\varrho^2 + 6\varrho - 1}}{8\varrho^3}.$$

§ 6. Die Rektifikation der Lemniskate und des Ovales von Cassini.

560. Der Lemniskatenbogen. Die Lemniskate hat in Polarkoordinaten die Gleichung (Nr. 537):

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

Daraus folgt:

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\omega} = -2a^2 \sin 2\omega, \qquad \varrho^4 + \varrho^2 \frac{d\varrho^2}{d\omega^2} = 4a^4,$$

und wenn man mit s den Bogen der Kurve gerechnet von einem willkürlichen Anfangspunkte an bezeichnet:

$$ds = 2a^2 \frac{d\varrho}{\sqrt{4a^4 - \varrho^4}} \quad \text{oder} \quad ds = a\sqrt{2}\, \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Setzt man $\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi$, $\cos\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}$, so wird:

$$ds = a \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Wird also die Strecke a zur Einheit gewählt, und läfst man den Bogen s im Punkte $\omega = 0$ beginnen, so wird:

$$s = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Der Bogen der Lemniskate ist demnach gleich einem elliptischen Integrale erster Gattung, dessen Amplitude gleich φ *und dessen Modul gleich* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *ist.*

Wir werden später sehen, dafs die elliptischen Integrale erster Gattung unter einander addiert oder subtrahiert, multipliziert oder dividiert werden hönnen, in algebraischer Weise, ähnlich wie die Bogen des Kreises. Hieraus folgt dann, dafs man bei der Lemniskate analoge Konstruktionen ausführen kann wie in der Theorie der Kreisteilung.

561. Rektifikation des Cassinischen Ovales. Die Lemniskate ist nur ein besonderer Fall der unter dem Namen des *Ovales von Cassini* bekannten Kurve. Dieselbe ist definiert

durch die Eigenschaft, daſs das Produkt der Entfernungen jedes Kurvenpunktes von zwei festen Punkten konstant ist. Die Gleichung der Kurve wird in Polarkoordinaten

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\omega + a^4 = b^4;$$

$2a$ ist die Entfernung der beiden festen Punkte, b^2 das konstante Produkt. Die Cassinische Kurve bekommt drei sehr verschiedene Formen, je nachdem das Verhältnis $\frac{b}{a}$ kleiner, gleich oder gröſser als die Einheit ist; für $\frac{b}{a} = 1$ wird sie die Lemniskate.

Wir nehmen zuerst $\frac{b}{a} < 1$ an und setzen $b^2 = a^2 \sin 2\alpha$. Dann besteht die Kurve aus zwei symmetrischen geschlossenen Ovalen, und der Winkel 2α ist zugleich derjenige, welchen die vom Mittelpunkte aus an ein Oval gelegten Tangenten mit einander bilden. Die Radienvektoren, welche zu den Werten ω_0 und ω_1 gehören, begrenzen auf der Kurve zwei Bogen, die mit $s(\omega_0, \omega_1)$ und $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ bezeichnet werden sollen, oder einfach mit $s(\omega_1)$ und $\sigma(\omega_1)$, wenn $\omega_0 = 0$ ist. Darnach findet man leicht:

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega - \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

und hieraus folgt:

$$(1) \qquad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\alpha}},$$

$$(2) \qquad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\alpha}}.$$

Setzt man in der Gleichung (1)

$$(3) \qquad \sin\omega = \sin\alpha \sin\varphi$$

und in der Gleichung (2)

$$\sin \omega = \cos \alpha \sin \psi, \tag{4}$$

so erhält man:

$$s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}, \tag{5}$$

$$s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \psi}}. \tag{6}$$

Die Winkel φ_0, ψ_0, ω_0 und φ_1, ψ_1, ω_1 müssen den Gleichungen (3) und (4) genügen.

Setzt man $\omega_0 = 0$, so wird auch $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, und indem man φ, ψ, ω an Stelle von φ_1, ψ_1, ω_1 schreibt, ergeben die Gleichungen (5) und (6):

$$\frac{a}{b^2}[s(\omega) + \sigma(\omega)] = F(\sin \alpha, \varphi), \tag{7}$$

$$\frac{a}{b^2}[s(\omega) - \sigma(\omega)] = F(\cos \alpha, \psi). \tag{8}$$

Hieraus folgt, dafs jedes elliptische Integral erster Gattung, was auch der Modul sein mag, durch die Summe oder durch die Differenz zweier Bogen des Cassinischen Ovales von der betrachteten Art ausdrückbar ist. Umgekehrt ist jeder Bogen dieser Kurve durch die Summe zweier elliptischer Integrale erster Gattung mit komplementären Moduln dargestellt worden. Diese Moduln haben die Werte:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Setzt man in der Gleichung (7) $\omega = \alpha$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und bezeichnet man mit S die gesamte Länge beider Ovale, so erhält man

$$\frac{a}{4b^2} S = F_1(\sin \alpha).$$

Das vollständige Integral mit dem Modul $\sin \alpha$ ist also vermittelst des vollen Umfanges der Kurve darstellbar.

Für den Fall $\frac{b}{a} = 1$ ist der Winkel α gleich $\frac{\pi}{4}$ und die Bogen $\sigma(\omega)$ sind null; man erhält dann das bereits bekannte Resultat für die Lemniskate.

562. Beendigung der Untersuchung. Wir nehmen nun $\frac{b}{a} > 1$ an und setzen $a^2 = b^2 \sin 2\alpha$. Die Kurve besteht nun aus einem Ovale. Ich bezeichne jetzt mit $s(\omega_0, \omega_1)$ den Bogen, welcher durch die beiden zu ω_0 und ω_1 gehörigen Radien bestimmt wird, und mit $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ den Bogen, welchen die zu diesen senkrechten Radien begrenzen. Alsdann wird:

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}} \, d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}} \, d\omega;$$

folglich wird, indem man ω_0 und ω_1 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ annimmt:

$$(9) \quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{2}\frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\operatorname{cotg} 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}} \, d\omega,$$

$$(10) \quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{2}\frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\operatorname{cotg} 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}} \, d\omega.$$

Wir setzen nun in der Gleichung (9)

$$(11) \qquad \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\varphi}{\sin 2\alpha}$$

und in der Gleichung (1)

$$(12) \qquad \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos^2\alpha \sin^2\psi}{\sin 2\alpha},$$

so wird:

$$(13) \qquad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = b \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}},$$

$$(14) \qquad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = b \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}}.$$

Die Winkel φ_0, ψ_0, ω_0 und φ_1, ψ_1, ω_1 müssen den Gleichungen (11) und (12) genügen, und wenn man den Winkel ω' durch die Gleichung $\sin 2\omega' = \sin 2\alpha \sin 2\omega$ definiert, so reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$\sin\varphi = \frac{\sin\omega'}{\sin\alpha}, \qquad \sin\psi = \frac{\sin\omega'}{\cos\alpha}.$$

Ist $\omega_0 = 0$, so ist auch $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ und die Gleichungen (13) und (14) geben:

$$(15) \qquad \frac{1}{b}[s(\omega) + \sigma(\omega)] = F(\sin\alpha, \varphi),$$

$$(16) \qquad \frac{1}{b}[s(\omega) - \sigma(\omega)] = F(\cos\alpha, \psi).$$

Die Moduln dieser elliptischen Integrale sind komplementär und haben die Werte:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

Setzt man $\omega = \frac{\pi}{4}$, so wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und aus der Gleichung (15) folgt, wenn man mit S den gesamten Umfang der Kurve bezeichnet:

$$\frac{S}{4b} = F_1(\sin\alpha).$$

Man gelangt sonach zu den nämlichen Sätzen wie im ersten Falle.

§ 7. Über die algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch elliptische Integrale erster Gattung darstellen lassen.

563. Stellung des Problems. Die Bestimmung aller algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch elliptische Integrale erster Gattung darstellen lassen, bietet sehr grofse Schwierigkeiten dar, und Legendre, welcher sich vielfach mit dieser Frage beschäftigt hat, konnte keine Kurve finden, welche die Eigenschaft der Lemniskate besitzt. Vor mehreren Jahren

habe ich die vollständige Lösung des Problemes gegeben (drei Abhandlungen in *Liouville's Journal, erste Serie Bd. 10*), indem ich mich dabei immer auf solche Kurven beschränkte, bei welchen sich die geradlinigen Koordinaten als rationale Funktionen einer Variabelen darstellen lassen. Ich gelangte so zu einer unendlichen Mannigfaltigkeit verschiedener Klassen, von denen jede unendlich viele individuelle Kurven umfaſst, bei denen die Bogenlängen elliptische Integrale mit verschiedenen Moduln werden. Die weitere Untersuchung ergab sodann zwei bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, welche allen Kurven der ersten Klasse gemein sind und auch zu ihrer Definition dienen können. Die Theorie dieser Kurven wird dadurch unabhängig von den analytischen Untersuchungen, welche mir zu ihrer Entdeckung verhalfen.

564. Erste charakteristische Eigenschaft. Es gilt der **Satz:** *Es sei n eine ganze oder gebrochene, ja auch irrationale Zahl; wir konstruieren das Dreieck OMP so, daſs*

$$OP = \sqrt{n} \quad \text{und} \quad MP = \sqrt{n+1}$$

wird; ferner denken wir uns, daſs, während die Ecke O fest bleibt, das Dreieck derart verändert wird, daſs der Kosinus des Winkels ω, zwischen der veränderlichen Seite OM und einer festen Geraden, beständig gleich ist dem Kosinus des Winkels

$$n MOP - (n+1)\, OMP;$$

alsdann beschreibt der Punkt M eine Kurve (die algebraisch wird, wenn n rational ist), deren Bogen als Funktion des Radiusvektor durch ein elliptisches Integral ausdrückbar ist, dessen Modul auf den Wert $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ zurückgeführt werden kann.

Denn ist $MOP = \alpha$, $OMP = \beta$, so ergiebt sich die Gleichung der Kurve aus der Elimination von α und β zwischen den Gleichungen:

$$\cos\omega = \cos[n\alpha - (n+1)\beta],$$

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2 - 1}{2\varrho\sqrt{n}}, \qquad \cos\beta = \frac{\varrho^2 + 1}{2\varrho\sqrt{n+1}};$$

aus diesen letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\sin\alpha = \frac{R}{2\varrho\sqrt{n}}, \qquad \sin\beta = \frac{R}{2\varrho\sqrt{n+1}},$$

wenn $R = \sqrt{-\varrho^4 + 2\varrho^2(2n+1) - 1}$ gesetzt wird. Durch Differentiation findet man

$$\pm\, d\omega = n\,d\alpha - (n+1)\,d\beta,$$

$$d\alpha = -\frac{\varrho^2+1}{R}\frac{d\varrho}{\varrho}, \qquad d\beta = -\frac{\varrho^2-1}{R}\frac{d\varrho}{\varrho},$$

also:

$$\pm\, d\omega = \frac{\varrho^2-(2n+1)}{R}\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und folglich erhält man für das Differential des Bogens

$$\pm\, ds = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{d\varrho}{R}.$$

Aus den vorigen Gleichungen folgen auch die weiteren, welche zu beachten sind:

$$\mp\, ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\cos\beta}, \qquad \mp\, ds = \sqrt{n+1}\,\frac{d\beta}{\cos\alpha}.$$

Ferner erhält man, wenn man $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ setzt:

$$\sin\beta = k\sin\alpha, \qquad \cos\beta = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha};$$

also, wenn man annimmt, daſs $d\varrho$ das Vorzeichen von $d\alpha$ hat:

$$ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

und sonach ist der Bogen, gerechnet vom Punkte der Polaraxe, für welchen $\alpha = 0$ oder $\varrho = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ ist, ausgedrückt durch das elliptische Integral mit dem Modul k und der Amplitude α:

$$\sqrt{n}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

was bewiesen werden sollte. Man sieht leicht, daſs für den Fall $n = 1$ die Kurve mit der Lemniskate identisch wird.

Die Fläche des erzeugenden Dreieckes OMP ist $\frac{R}{4}$, und andererseits findet man leicht

$$\frac{1}{2}\int \varrho^2\, d\omega = \frac{R}{4} + \text{const.}$$

Hieraus folgt, daſs die Fläche eines Sektors der Kurve, von der Polaraxe an gerechnet, immer gleich ist der Fläche des erzeugenden Dreieckes.

565. Zweite charakteristische Eigenschaft. Ich gehe nun zur Untersuchung der zweiten Eigenschaft dieser bemerkenswerten Kurven über. Es ist in dem Dreieck OMP

$$\varrho^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos(\alpha+\beta),$$

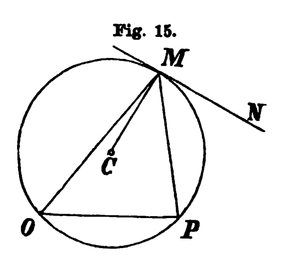
also:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm\varrho\frac{d\omega}{ds},$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{R}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm\frac{d\varrho}{ds}.$$

Hieraus folgt, daſs der Neigungswinkel zwischen der Normalen und dem Radiusvektor gleich $\alpha+\beta$ oder gleich dem Supplemente davon ist. Konstruiert man also im Punkte M einen Winkel $PMN = MOP$, indem man zunächst den ersten Fall betrachtet, so wird MN die Normale der Kurve im Punkte M, welcher zur Lage OMP des erzeugenden Dreieckes gehört. Andererseits liegt der Punkt O auf dem Kreisbogen, welcher zu der Sehne MP und dem Peripheriewinkel $MOP = PMN$ gehört; also ist MN die Tangente des dem erzeugenden Dreiecke umgeschriebenen Kreises, und wenn C der Mittelpunkt dieses Kreises ist, so wird der Radius MC die Tangente der Kurve. Ferner erkennt man leicht, daſs, wenn die Ecke M des Dreieckes bei stetiger Bewegung die Kurve beschreibt, diese Eigenschaft für alle Lagen des Dreieckes gilt.

Fig. 15.



Man kann aber auch annehmen, daſs der Neigungswinkel der Normalen und des Radiusvektor gleich dem Supplemente von $\alpha+\beta$ ist. Wenn man dann das Dreieck OMP um die

Gerade OM dreht, so erhält man ein zweites Dreieck an Stelle des ersten zur Erzeugung der Kurve, und die vorige Eigenschaft gilt dann für dieses neue Dreieck.

Hieraus ergiebt sich die folgende Erzeugungsweise:

Zweiter Satz. *Wenn das Dreieck OMP so variiert wird, dafs der Eckpunkt O fest bleibt und dafs die beweglichen Seiten OP und MP beständig gleich $\sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1}$ sind, wenn ferner die unendlich kleine Verschiebung MM' des Punktes M in jedem Momente auf der Geraden erfolgt, welche diesen Punkt mit dem Mittelpunkte des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises verbindet, so erzeugt der Punkt M die elliptische Kurve, welche zur Zahl n gehört.*

Sechstes Kapitel.

Die Kubatur der Körper und die Quadratur krummer Flächen. Mehrfache Integrale.

---

§ 1. Kubatur durch einfache Integrale.

566. Volumen eines Cylinders von konstanter Höhe. Wie in der Elementargeometrie gezeigt wird, ist das Volumen eines Prismas gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalte F seiner Grundfläche und seiner Höhe h. Derselbe Satz gilt auch von jedem Cylinder mit beliebiger Grundfläche.

Um dies zu zeigen knüpfen wir zunächst an die Figur an, welche wir bereits in Nr. 404 betrachteten. Der Fläche $ACMP$ wurde in der dort angegebenen Weise ein Polygon $ACN_1M_1 \dots N_nPA$ eingeschrieben und ein Polygon $AN_0'M_1N_1' \dots MPA$ umgeschrieben. Wir behalten die dortige Bezeichnungsweise bei und nennen F den Inhalt der Fläche $ACMP$, Φ_n den des eingeschriebenen, Ψ_n den des umgeschriebenen Polygons. Auf F als Grundfläche errichten wir einen geraden Cylinder mit der Höhe h, auf Φ_n und Ψ_n zwei gerade Prismen mit derselben Höhe h.

Alsdann wird auch der Cylinder das eine der beiden Prismen vollständig einschliefsen, von dem anderen vollständig umschlossen werden. Mithin besteht zwischen seinem Volumen V und denen $h\Phi_n$, $h\Psi_n$ der beiden Prismen die Beziehung:

$$h\Phi_n \leqq V \leqq h\Psi_n.$$

Für unbegrenzt wachsendes n ergiebt sich also bei beständiger Verkleinerung der Intervalle

$$\lim h\Phi_n \leqq V \leqq \lim h\Psi_n$$

oder

$$h \lim \Phi_n \leqq V \leqq h \lim \Psi_n.$$

Nun ist aber nach Nr. 406:

$$\lim \Phi_n = \lim \Psi_n = F,$$

also wird:

$$hF \leqq V \leqq hF, \text{ d. h.}$$

$$V = hF,$$

w. z. bew. w.

Bisher wurde angenommen, daſs die Grundfläche F ein Viereck sein sollte, von dem nur eine Seite krummlinig war, während seine anderen Seiten von drei auf einander senkrechten Geraden gebildet wurden. Ist diese Annahme nicht erfüllt, so läſst sich die Figur doch in den praktisch wichtigen Fällen in eine endliche Anzahl von Flächenstücken dieser Beschaffenheit zerlegen. Sind $F_1, F_2, \ldots F_n$ die Inhalte von diesen, so zerfällt auch der Cylinder in die entsprechenden Teilcylinder von der Höhe h. Sind $V_1, V_2, \ldots V_n$ die Inhalte derselben, V das Volumen des ganzen Cylinders, so wird:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots + V_n \\ &= hF_1 + hF_2 + \cdots + hF_n \\ &= h(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \\ &= hF \end{aligned}$$

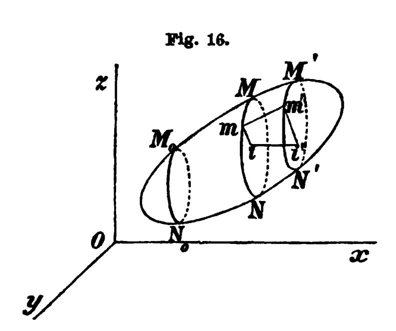
wie vorher.

567. Volumen eines beliebigen Körpers. Wir wollen voraussetzen, daſs unser Körper von einer stetigen geschlossenen Fläche begrenzt ist, so daſs die Definition des Volumens keine Schwierigkeiten bietet.

Es seien Ox, Oy, Oz die drei Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes. Wir bezeichnen mit V das Volumen eines Segmentes eines beliebigen Körpers, welches von den beiden Ebenen M_0N_0 und MN begrenzt ist, die der yz-Ebene parallel sind und zu den Abscissen x_0 und x gehören. Nimmt man x_0 als konstant und x als variabel an, so wird das Volumen V von x abhängig sein. Wir betrachten nun zwei Querschnitte des Körpers, gebildet durch die Ebenen MN und $M'N'$, welche parallel zur yz-Ebene sind und zu den Abscissen x und $x + \Delta x$ gehören. Diese beiden Ebenen bestimmen ein Segment, dessen Volumen ΔV heiſsen möge. Den Inhalt des von der Ebene

MN gebildeten Querschnittes bezeichnen wir mit u. Im Innern dieser Fläche u nehmen wir einen Punkt i an, ziehen ii' parallel der Axe OX, und legen durch ii' irgend eine Halbebene $mii'm'$, welche die Ebenen MN und $M'N'$ in im und $i'm'$, und die Begrenzungsfläche des Körpers in der Kurve mm' schneidet. Durch alle Punkte der Geraden ii' legen wir Parallele zu im, welche alle durch die Kurve mm' begrenzt werden. Ihre Längen l sind Funktionen der Abscisse x, die zu dem Querschnitte MN gehört, und des Winkels ω, welchen die zugehörige Ebene $imm'i'$ mit der xy-Ebene bildet. Unsere Voraussetzung, die Fläche solle stetig sein, wollen wir jetzt dahin präzisieren, daſs l eine stetige Funktion von x und ω sein soll. Alsdann sei l_1 die kleinste und l_2 die gröſste unter diesen Geraden. Diese Längen tragen wir auf der Geraden im vom Punkte i aus ab, so daſs $ip_1 = l_1$, $ip_2 = l_2$ wird. Läſst man nun die Halbebene $mii'm'$ um die feste Gerade ii' sich drehen, wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, daſs die Querschnitte des Körpers so gestaltet sind, daſs jeder Strahl im die Begrenzungskurve immer nur in *einem* Punkte trifft, so beschreiben die beiden Punkte p_1 und p_2 in der Ebene MN zwei stetige geschlossene Kurven, deren Flächen wir mit u_1 und u_2 bezeichnen. Konstruiert man nun den Cylinder, dessen Basis die Kontour der Fläche u_1 ist und dessen Erzeugenden parallel zu OX sind, ferner einen zweiten Cylinder mit der Kontour von u_2, so ist das Volumen ΔV zwischen diesen beiden Cylindern enthalten, also:

Fig. 16.



$$u_1 \Delta x < \Delta V < u_2 \Delta x,$$

oder

$$u_1 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < u_2. \tag{1}$$

Hier ist:

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l_1^2\, d\omega, \qquad u_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l_2^2\, d\omega, \tag{2}$$

während der Inhalt des Querschnittes MN durch

$$(3) \qquad u = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l^2\, d\omega$$

gegeben wird. Die Längen l sind stetige Funktionen von x und ω, l_1 und l_2 bedeuten den Maximal- bzw. Minimalwert des l bei festem ω, wenn x von x bis $x + \Delta x$ variiert. Setzt man also $\Delta x = 0$, so wird $l_1 = l_2 = l$ und daher folgt aus (2) und (3) durch Grenzübergang $u_1 = u_2 = u$ und mithin aus (1):

$$\frac{dV}{dx} = u,$$

oder, da V für $x = x_0$ verschwindet:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\, dx.$$

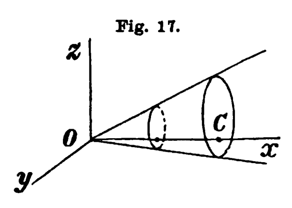
Es ergiebt sich also der

Satz. *Das Volumen eines Körpers, welcher durch eine stetige Fläche und zwei zur x-Axe senkrechte Ebenen begrenzt ist, findet man, indem man in einem beliebigen Abstande eine zur Endfläche parallele Ebene legt und den Flächeninhalt des entstandenen Querschnittes nach x integriert. Die Grenzen der Integration sind dabei die den beiden Endflächen entsprechenden Werte von x.*

Dieses Resultat setzt voraus, dafs die Fläche u als Funktion von x bekannt ist. Die Bestimmung derselben erfordert also im allgemeinen selbst wieder eine Integration; aber es giebt Fälle, wo diese unmittelbar ausgeführt werden kann, wie wir an einigen Beispielen sehen wollen.

568. Erstes Beispiel. *Berechnung des Volumens eines Kegels mit beliebiger Basis.* Wir wählen den Scheitel O des Kegels zum Anfangspunkt dreier geradliniger Axen, und das Lot von diesem Scheitel auf die Basis zur x-Axe. Wenn man mit B die Gröfse der Basisfläche, mit H die Höhe des Kegels bezeichnet, so ist bekanntlich

Fig. 17.



$$\frac{u}{B} = \frac{x^2}{H^2}, \qquad u = \frac{B}{H^2} x^2,$$

und daher wird das Volumen:

$$V = \frac{B}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{3} BH.$$

569. Zweites Beispiel. *Volumbestimmung des Segmentes eines Ellipsoides, welches zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten ist.*

Wir beziehen das Ellipsoid auf drei konjugierte Durchmesser Ox, Oy, Oz, von denen die beiden letzten parallel zu den Basisebenen des Segmentes sind. Die Gleichung der Begrenzungsfläche des Körpers wird:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b'^2\left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right)} + \frac{z^2}{c'^2\left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right)} = 1,$$

a', b', c' sind die halben Längen der konjugierten Durchmesser. Die Fläche u ist hier die einer Ellipse, in welcher zwei konjugierte Durchmesser die Längen haben, welche gleich sind dem Doppelten der Werte

$$b'\sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}}, \qquad c'\sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}}.$$

Ferner ist der Winkel zwischen diesen Durchmessern gleich dem Winkel θ, den die halben Durchmesser b', c' des Ellipsoides bilden. Also ist

$$u = \pi b' c' \sin\theta \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right).$$

Wenn also x_0 und x_1 die Werte von x bezeichnen, welche zu den Basisebenen des Segmentes gehören, und α den Winkel, welchen die x-Axe mit der yz-Ebene bildet, so wird der Abstand der zu x_0 und x gehörenden Ebenen $= (x - x_0) \sin\alpha$ und daher

$$V = \pi b' c' \sin\theta \sin\alpha \int_{x_0}^{x_1} \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right) dx$$

oder

$$V = \pi b' c' \sin\theta \sin\alpha \left[(x_1 - x_0) - \frac{x_1^3 - x_0^3}{3a'^2}\right].$$

Um das ganze Volumen des Ellipsoides zu erhalten, mufs man $x_0 = -a'$, $x_1 = +a'$ setzen, alsdann folgt

$$V = \frac{4}{3}\pi a' b' c' \sin\theta \sin\alpha.$$

Wählt man für a', b', c' die Halbaxen a, b, c, so ist $\alpha = 90^0$, $\theta = 90^0$ und

$$V = \frac{4}{3}\pi abc;$$

der Vergleich dieser beiden Formeln ergiebt

$$abc = a' b' c' \sin\theta \sin\alpha,$$

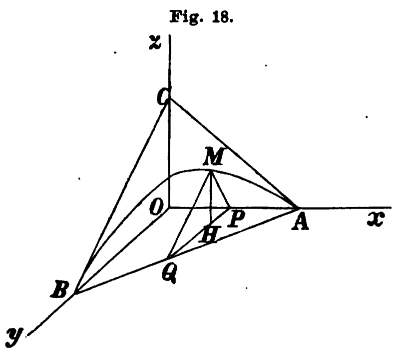
wodurch der bekannte Satz ausgedrückt ist, dafs das Parallelepiped, welches über drei konjugierten Durchmessern konstruiert ist, ein konstantes Volumen hat.

Man erkennt, dafs man durch eine ähnliche Rechnung das Volumen des Segmentes eines ein- oder zweischaligen Hyperboloides, sowie eines elliptischen Paraboloides erhält.

570. Drittes Beispiel. *Es seien drei rechtwinklige Koordinatenaxen gegeben; es soll das Volumen bestimmt werden, welches innerhalb des Oktanten mit positiven Koordinaten von dem hyperbolischen Paraboloide begrenzt wird, dessen Gleichung $xy = az$ ist, wobei a eine Konstante bedeutet, ferner von der Ebene ABC, welche die Gleichung $x + y + z = a$ hat, und von der xy-Ebene.*

Das Paraboloid wird von der Ebene ABC in einer Hyperbel AMB geschnitten und enthält sowohl die x-Axe wie die y-Axe. Die Ebene PMQ, parallel zur yz-Ebene, welche zur Abscisse x gehört, schneidet die Fläche längs einer Geraden MP, und die Ebene ABC in der Geraden MQ, welche parallel ist zu BC, dem Schnitt derselben Ebene ABC mit der yz-Ebene; die Ebene xy schneidet sie längs der Geraden PQ parallel zu Oy. Die mit u bezeichnete Fläche ist also hier ein Dreieck PMQ, durch welches das zu bestimmende Volumen erzeugt wird.

Fig. 18.



Die Basis PQ dieses Dreieckes ist die Ordinate y, welche der Geraden AB bei dem Abscissenwerte x angehört. Also ist

$$PQ = a - x.$$

Die Höhe MH des Dreieckes PMQ ist die Ordinate z, welche bei dem Abscissenwerte x dem Schnitt des Paraboloides und der Ebene ABC zukommt. Die Elimination von y zwischen den Gleichungen dieser beiden Flächen ergiebt:

$$x(a - z - x) = az,$$

also ist

$$MH = z = \frac{x(a-x)}{a+x},$$

folglich wird der Wert von u gleich

$$u = \frac{1}{2} \frac{x(a-x)^2}{a+x}.$$

Das gesuchte Volumen V ist durch die Ebenen begrenzt, welche zu $x = 0$ und $x = a$ gehören; mithin wird

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}\, dx = \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3ax}{2} + 2a^2 - \frac{2a^3}{x+a}\right) dx,$$

und man erhält:

$$V = \left[\frac{17}{12} - l(4)\right] a^3.$$

571. Das Volumen eines Rotationskörpers. Die mit u bezeichnete Querschnittsfläche läfst sich unmittelbar angeben bei allen Rotationskörpern; denn wählt man die Rotationsaxe zur x-Axe, so wird diese Fläche ein Kreis oder die Fläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen.

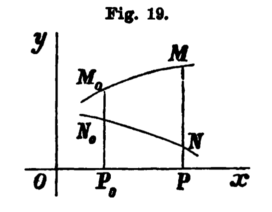


Fig. 19.

Es sei M_0M eine gegebene Kurve, gelegen in der xy-Ebene. Wir betrachten den Körper, welcher entsteht, wenn die Fläche M_0P_0PM zwischen der Kurve M_0M, der x-Axe und den Ordinaten M_0P_0 und MP um die x-Axe gedreht wird. Die Fläche u wird eine Kreisfläche mit dem Radius y; also ist

$$u = \pi y^2, \qquad V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx,$$

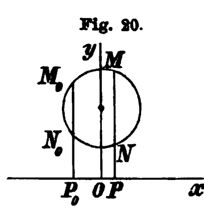
wenn x_0 und x_1 die Abscissen sind, die zu den Ordinaten M_0P_0 und MP gehören.

Ist das Volumen zu bestimmen, welches von einer Fläche M_0N_0NM erzeugt wird, die zwischen zwei gegebenen Kurven M_0M, N_0N und den Ordinaten M_0P_0, MP liegt, so hat man die Ordinaten y und y' dieser beiden Kurven zu betrachten. Die Fläche u ist von den zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien y und y' eingeschlossen; also ist

$$u = \pi(y^2 - y'^2), \qquad V = \pi \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2)\, dx.$$

572. Erstes Beispiel. *Das Volumen des Kreisringes.* Wir beziehen den erzeugenden Kreis auf zwei rechtwinklige Axen, von denen die x-Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt. a sei der Radius des Kreises, β die Ordinate des Mittelpunktes, y, y' die Ordinaten der Punkte M, N, welche zu derselben Abscisse x gehören; es ist

Fig. 20.



$$y + y' = 2\beta, \quad y - y' = 2\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y^2 - y'^2 = 4\beta\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wir nehmen an, dafs die Rotationsaxe aufserhalb des Kreises liegt, so ist

$$u = 4\pi\beta\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad V = 4\pi\beta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Bezeichnet man nun mit v die Fläche des Kreissegmentes, welche zwischen den Ordinaten M_0P_0 und MP liegt, die zu x_0 und x_1 gehören, so ist

$$v = \int_{x_0}^{x_1} (y - y')\, dx = 2 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Also ist das entsprechende Segment des Kreisringes

$$V = 2\pi\beta v.$$

Für das ganze Volumen des Ringes hat man $v = \pi a^2$ zu setzen, und es wird

$$V = 2\pi^2 a^2 \beta.$$

573. Zweites Beispiel. *Das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der Cykloidenfläche um ihre Basis entsteht.*

Wenn man die Basis der Cykloide zur x-Axe und die Senkrechte in einem Endpunkte der Basis zur y-Axe wählt, so ist die Kurve definiert durch die Gleichungen (Nr. 231):

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi),$$

und hieraus folgt:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi.$$

Wird das Volumen erzeugt durch die Fläche, welche zwischen der Kurve, der Basislinie und der Ordinate y, die zur Abscisse x oder dem Winkel φ gehört, liegt, so wird:

$$V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi a^3 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3 d\varphi.$$

Nun ist

$$(1 - \cos\varphi)^3 = \frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi,$$

also

$$V = \pi a^3 \left(\frac{5}{2}\varphi - \frac{15}{4}\sin\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi\right)\cdot$$

Will man den Körper, welcher von der ganzen Cykloide erzeugt wird, berechnen, so ist $\varphi = 2\pi$ zu setzen und es wird

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

574. Drittes Beispiel. *Das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der Cykloidenfläche um die Tangente im Scheitelpunkt entsteht.*

Die Kurve sei auf die nämlichen Axen wie vorhin bezogen und es sei V das Volumen, welches durch die Fläche erzeugt ist, die zwischen der Kurve, der Tangente im Scheitelpunkt und der Geraden von der Länge $2a - y$ liegt, die senkrecht zu dieser zum Winkel φ gehört. Man erhält

$$V = \pi \int_x^{\pi a} (2a - y)^2 dx = \pi a^3 \int_\varphi^\pi (1 + \cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Nun ist

$$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \text{const.},$$

$$\int \cos\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi + \text{const.};$$

also

$$V = \pi a^3 \left(\frac{\pi - \varphi}{2} + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \cdot$$

Setzt man $\varphi = 0$, so erhält man das Volumen, welches von der Fläche zwischen der halben Cykloide und der Tangente im Scheitel erzeugt ist; verdoppelt man dasselbe, so erhält man das ganze Volumen, nämlich

$$V = \pi^2 a^3.$$

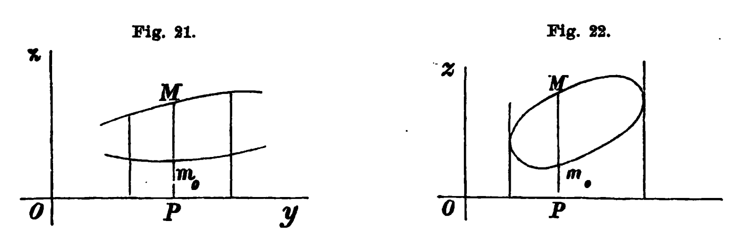
Es ist also der fünfte Teil des in dem vorigen Beispiel betrachteten Volumens.

§ 2. Kubatur durch Doppelintegrale.

575. Das Volumen als zweifaches Integral. Wir kehren zu der Gleichung

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\, dx \tag{1}$$

zurück, die wir in Nr. 567 für rechtwinklige Koordinaten aufgestellt haben und in welcher V das Volumen eines Körpersegmentes bedeutet, das zwischen den zwei zur yz-Ebene parallelen Ebenen enthalten ist, welche zu den Abscissen x_0 und x_1 gehören. Wir nehmen dabei immer an, daſs die Fläche, deren Inhalt u ist, von einer Kurve begrenzt ist, welche von den zur z-Axe parallelen Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird; wenn nämlich diese Kurven an mehreren Stellen,



jedoch in endlicher Anzahl, von diesen Geraden geschnitten werden, so kann man das Volumen V in mehrere Teile zerlegen, von denen jeder dieser Bedingung genügt. Es seien nun z_1 und z_0 die Ordinaten MP und m_0P, welche zu einem

bestimmten Werte $OP = y$ gehören; y_0 und y_1 mögen die Werte von y bezeichnen, welche zu den Grenzen der Kontour von u gehören. Alsdann wird die Fläche u gegeben durch den Ausdruck

$$(2) \qquad u = \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dy,$$

und die Gleichung (1) läfst sich demnach folgendermafsen schreiben:

$$(3) \qquad V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dy.$$

In dieser Gleichung sind z_1 und z_0 gegebene Funktionen von x und y; sie sind die Ordinaten z der beiden Punkte der Oberfläche des Körpers, welche zu den Koordinaten x, y gehören; y_0 und y_1 sind Funktionen der Variabelen x, sie bedeuten die Ordinaten parallel zur y-Axe und gehören zur Abscisse x für die Kurve, welche die Projektion des Volumen V auf die xy-Ebene begrenzt; endlich sind x_0 und x_1 gegebene Konstanten. Die Gleichung (2) drückt bekanntlich aus, dafs

$$u = \lim S (z_1 - z_0) \Delta y$$

ist, wenn man x als konstant ansieht und y von y_0 bis y_1 in Intervallen Δy variieren läfst, welche zuletzt null werden. Ebenso ist nach der Gleichung (1)

$$V = \lim S u \Delta x;$$

indem x hierbei von x_0 bis x_1 in Intervallen variiert, welche gleich Δx sind. Also kann man schreiben:

$$V = \lim S \Delta x \lim S (z_1 - z_0) \Delta y$$

oder

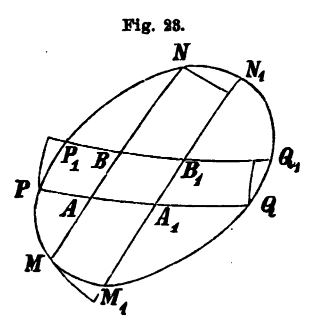
$$(4) \qquad V = \lim_{\Delta x = 0} \lim_{\Delta y = 0} SS (z_1 - z_0) \Delta x \Delta y,$$

wobei zunächst die Reihenfolge der Grenzprozesse zu beachten ist. Der Ausdruck (3) heifst ein *zweifaches Integral*, weil zwei Integrationen nach einander und in bestimmter Reihenfolge auszuführen sind. Der Ausdruck (4) zeigt, dafs V die Grenze ist, nach welcher die Summe der Prismen $(z_1 - z_0) \Delta x \Delta y$ konvergiert. Die Basen $\Delta x \Delta y$ dieser Prismen ergeben eine

Summe, deren Grenze die Projektion unseres Körpers auf die xy-Ebene ist.

576. Existenz des Doppelintegrales. Die Aufgabe, für einen beliebig begrenzten Körper die Existenz einer bestimmten Volumzahl V nachzuweisen und die Gröfse derselben zu berechnen, kann, wenn die Begrenzungsfläche auf drei rechtwinklige Koordinatenaxen bezogen ist und wenn die zur z-Axe parallelen Geraden diese Fläche überall nur in einer endlichen Anzahl von Punkten durchschneiden, durch Zerlegung des Körpers auf die folgende einfachere zurückgeführt werden (Nr. 578): In der xy-Ebene ist eine von einer stetigen Kurve umschlossene Fläche vom Inhalt P gegeben. Zu jedem Punkte x, y im Innern oder an der Grenze dieser Fläche gehöre eine Ordinate $z = f(x, y)$. Wir nehmen an, dafs $f(x, y)$ in dem Gebiete P eine stetige Funktion von x und y ist, so dafs die Endpunkte dieser Ordinaten eine stetige Fläche im Raume bilden, deren normale Projektion auf die xy-Ebene die Fläche P ist. Es soll das Volumen des cylindrischen Körpers bestimmt werden, dessen Basis die Fläche P und dessen Seitenfläche der Cylindermantel mit den Erzeugenden z längs der Randkurve dieser Basis ist, und der endlich von der Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt ist. Wir zerlegen die Fläche P nach irgend welchem Gesetze in eine Reihe von Teilgebieten ΔP, deren Anzahl mit n bezeichnet werden möge. Diese Zerlegung kann vermittelst zweier Kurvensysteme ausgeführt werden, von denen jedes von einem variabelen Parameter abhängt. Als Teilgebiete erscheinen dann die krummlinigen Vierecke $ABB_1A_1 = \Delta P$, welche von zwei benachbarten Kurven MN, M_1N_1 des einen Systemes und zwei benachbarten Kurven PQ, P_1Q_1 des anderen gebildet werden. Die verschiedenen Elemente ΔP sind im allgemeinen auch der Gröfse nach verschieden. In der Nähe der Randkurve der Fläche P werden diese Elemente ΔP teilweise durch Bögen der Randkurve begrenzt.

Fig. 28.



Der gröfste Wert, den die Ordinate $z = f(x, y)$ in einem bestimmten Gebiete ΔP annimmt, werde wie in Nr. 405 jedesmal mit G, der kleinste mit g bezeichnet. Bildet man den Cylinder mit der Basis ΔP und der Höhe G, und betrachtet man die Summe aller dieser Cylindervolumina, die zu den verschiedenen Elementen ΔP gehören, so erhält man einen aus Cylindern zusammengesetzten Körper, das „umschriebene Polyeder" (vergl. Nr. 405), welcher den gegebenen in sich enthält und dessen Volumen Ψ_n also gröfser ist als das gesuchte. Bildet man dagegen die Summe der Cylinder mit der Basis ΔP und der Höhe g, so erhält man das „eingeschriebene Polyeder", das ganz in dem gegebenen Körper enthalten ist und dessen Volumen Φ_n also kleiner ist als das gesuchte. Es ist daher

$$\Phi_n = Sg\Delta P, \qquad \Psi_n = SG\Delta P$$

und

$$\Phi_n < V < \Psi_n.$$

Wir denken uns jetzt durch fortgesetzte weitere Teilung die Anzahl n unserer Elemente ΔP unbegrenzt vermehrt in der Weise, dafs die Dimensionen jedes einzelnen unter jede gegebene Gröfse herabsinken. Da $z = f(x, y)$ nach unserer Annahme im Gebiete ΔP stetig ist, so kann die Schwankung $G - g$ in jedem Gebiete ΔP mit ΔP selbst beliebig klein gemacht werden. Hieraus folgt wie in Nr. 405, dafs die Differenz der Volumina des umschriebenen und des eingeschriebenen Polyeders $\Psi_n - \Phi_n$ den Grenzwert Null erhält. Man schliefst weiter wie in Nr. 406, dafs die Φ_n beständig wachsend, die Ψ_n beständig abnehmend denselben Grenzwert $\Phi = \Psi = V$ annehmen. Dabei ist

$$\Phi = \lim \Phi_n = \lim Sg\Delta P,$$

$$\Psi = \lim \Psi_n = \lim SG\Delta P.$$

Der so erhaltene Grenzwert V ist aber auch unabhängig von dem bei der Einteilung befolgten Verfahren.

Sind Φ_n' und Ψ_n' die Werte, die wir, den Φ_n und Ψ_n entsprechend, bei einer anderen Einteilung erhalten hätten, so können wir wie in Nr. 406 für ein bestimmtes n beide Teilungen zu einer neuen zusammensetzen, die uns die Werte

Φ_n'' und Ψ_n'' liefert. Da die neue Einteilung als Fortsetzung der ersten aufgefafst werden kann, so sind Φ_n'' und Ψ_n'' zwischen Φ_n und Ψ_n enthalten, so dafs

$$\Phi_n < \Phi_n'' < \Psi_n'' < \Psi_n$$

wird.

Hieraus folgt aber:

$$0 < \Phi_n'' - \Phi_n < \Psi_n - \Phi_n$$

und

$$0 < \Psi_n - \Psi_n'' < \Psi_n - \Phi_n.$$

Mithin ergiebt sich an der Grenze, da $\lim(\Psi_n - \Phi_n) = 0$ war:

$$\lim \Phi_n'' = \lim \Phi_n,$$

$$\lim \Psi_n'' = \lim \Psi_n.$$

Ebenso können wir die neue Einteilung mit der zweiten vergleichen und erhalten:

$$\lim \Phi_n'' = \lim \Phi_n',$$

$$\lim \Psi_n'' = \lim \Psi_n'.$$

Es ist daher:

$$\lim \Phi_n = \lim \Phi_n' = V,$$

$$\lim \Psi_n = \lim \Psi_n' = V,$$

wie behauptet war.

Hiermit ist der Satz gewonnen:

Satz. *Gegeben sei in der (x, y)-Ebene ein Gebiet P. Dieses sei von einer stetigen Kurve begrenzt, welche von jeder Ordinate y in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten wird. Die Funktion $z = f(x, y)$ sei stetig im Inneren und auf der Grenze von P. Man zerlege jetzt das Gebiet P in eine Anzahl von Teilgebieten ΔP und bilde über alle Teilgebiete die Summe:*

$$S f(x, y) \Delta P,$$

wo (x, y) die Koordinaten irgend eines Punktes im Inneren des zugehörigen ΔP bedeuten. Läfst man nun die Anzahl der Teilgebiete ΔP unbegrenzt wachsen, so dafs die Dimensionen jedes einzelnen unter jede Grenze sinken, so strebt diese Summe einem Grenzwerte zu, der unabhängig von der Art der gewählten Einteilung ist. Dieser heifst das über das Gebiet P erstreckte Doppelintegral der Funktion $f(x, y)$ und wird bezeichnet durch:

$$\lim S f(x, y) \Delta P = \int\!\!\int f(x, y)\, dP.$$

Dieses Doppelintegral mifst gleichzeitig das Volumen desjenigen Cylinders, dessen Basis das Gebiet P, dessen Endfläche die Fläche $z = f(x, y)$ ist und dessen Seitenlinien durch die Lote gebildet werden, welche in den Randpunkten des Gebietes P auf der xy-Ebene errichtet sind.

577. Das Doppelintegral als zweifaches Integral. Ein *Flächen*- oder *Doppelintegral* wird berechnet, indem man es auf ein *zweifaches* Integral zurückführt, das heifst auf zwei successive einfache Integrationen. Wir nehmen an, dafs die Elemente ΔP durch das System von Geraden bestimmt sind, welche der x-Axe parallel sind, und ferner durch das Geradensystem parallel zur y-Axe. Es wird dann

$$\Delta P = \Delta x \Delta y,$$

mit Ausnahme derjenigen Flächenelemente, welche an der Randkurve von P liegen. Indem wir nur diejenigen Rechtecke ins Auge fassen, welche vollständig innerhalb der ebenen Fläche P liegen und mit diesen die Summe

$$V' = Sf(x, y) \Delta x \Delta y$$

bilden, mufs der Grenzwert derselben gleich dem Grenzwerte

$$V = \lim Sf(x, y) \Delta P$$

werden, weil der Unterschied der Fläche P von der Summe der ihr eingeschriebenen Rechtecke $\Delta x \Delta y$ beliebig klein gemacht werden kann.

Die Summe V' kann nun auf zweierlei Weisen gebildet werden: entweder, indem man zunächst alle die Rechtecke addiert, die zu demselben Werte von x gehören, d. h. also alle die prismatischen Körper, deren Grundflächen in Summa einen zur y-Axe parallelen rechtwinkligen Streifen bilden, und nachdem dieses geschehen, alle diese Prismen addiert; wir drücken dies aus durch die Gleichung:

$$V' = S\Delta x\, Sf(x, y) \Delta y;$$

oder, indem man erst alle prismatischen Körper vereinigt, welche zu demselben Werte von y gehören, deren Basis also zusammen einen zur x-Axe parallelen Streifen bildet, und alsdann diese summiert; also:

$$V' = S\Delta y\, Sf(x, y) \Delta x.$$

In beiden Fällen ist dann schliefslich der Grenzwert für verschwindende Werte von Δx und Δy zu bilden. Wir betrachten zuvörderst den ersten Prozefs. Nennen wir wie früher G und g jedesmal den Maximal- und Minimalwert der Funktion $f(x, y)$ im Innern oder am Rande eines Elementes $\Delta x \Delta y$, so ist:

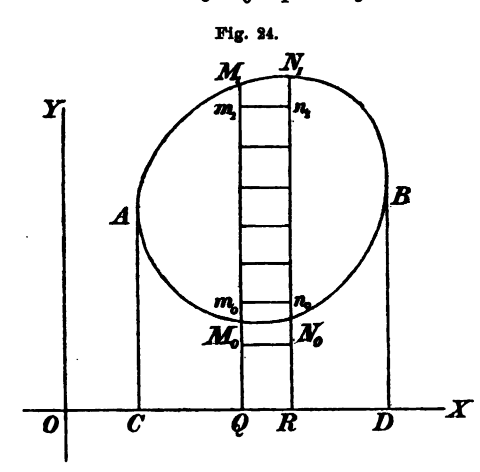
$$(1) \qquad Sg\,\Delta y \leqq Sf(x,y)\,\Delta y \leqq SG\,\Delta y.$$

Diese Relation bleibt bestehen, wenn wir im mittleren Gliede Δy beliebig verkleinern, dagegen in den beiden äufseren den Wert Δy und dementsprechend die Werte g und G beibehalten. Daher wird auch an der Grenze:

$$(2) \qquad Sg\,\Delta y \leqq \lim_{\Delta y = 0} Sf(x,y)\,\Delta y \leqq SG\,\Delta y.$$

Um die Grenzen bei dieser Summation zu bestimmen, betrachten wir die Figur 24.

Wir nehmen an, dafs die Begrenzung der Fläche P von den Parallelen QM_0M_1 zur y-Axe immer nur in zwei Punkten M_0 und M_1 geschnitten wird, die den Ordinaten $QM_0 = y_0$ und $QM_1 = y_1$ entsprechen. Zwei benachbarte Ordinaten unserer Teilung wie QM_0M_1 und QN_0N_1 schliefsen einen Streifen $M_0N_0N_1M_1$ ein, der durch die Parallelen zur x-Axe, welche unserer Einteilung entsprechen, in eine Anzahl von Rechtecken zerlegt wird.



m_0n_0 sei die erste, m_1n_1 die letzte dieser Parallelen, welche in unserem Streifen ganz im Innern des Gebietes P verlaufen. Alsdann sind die Grenzen unserer Summation nach y durch $y = Qm_0$ und $y = Qm_1$ gegeben und werden, wenn wir $\Delta y = 0$ werden lassen, in die *gröfste* Ordinate y_0' des Bogens M_0N_0 und in die *kleinste* Ordinate y_1' des Bogens M_1N_1 übergehen. Es wird also

$$\lim_{\Delta y=0} Sf(x, y)\,\Delta y = \int_{y_0'}^{y_1'} f(x, y)\,dy,$$

und es wird nach (2)

$$Sg\,\Delta y \leqq \int_{y_0'}^{y_1'} f(x, y)\,dy \leqq SG\,\Delta y.$$

Daraus folgt in Verbindung mit (1), dafs der absolute Wert der Differenz

$$Sf(x, y)\,\Delta y - \int_{y_0'}^{y_1'} f(x, y)\,dy$$

nicht gröfser ist als $S(G - g)\,\Delta y$.

Mithin ist auch

$$S\Delta x\,Sf(x, y)\,\Delta y - S\Delta x \int_{y_0'}^{y_1'} f(x, y)\,dy$$

nicht gröfser als

$$S\Delta x\,S(G - g)\,\Delta y = SS(G - g)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Lassen wir jetzt gleichzeitig Δx und Δy unbegrenzt abnehmen, so sinkt auch $G - g$ unter jede positive Zahl σ, und es wird daher auch

$$SS(G - g)\,\Delta x\,\Delta y < \sigma P,$$

d. h. es wird

$$\lim SS(G - g)\,\Delta x\,\Delta y = 0.$$

Also ist auch

$$\lim S\Delta x\,Sf(x, y)\,\Delta y = \lim S\Delta x \int_{y_0'}^{y_1'} f(x, y)\,dy, \tag{3}$$

wo auf der rechten Seite, die ja von Δy frei ist, der Limes nur für $\Delta x = 0$ zu nehmen ist. Die linke Seite ist aber nichts anderes als unser Doppelintegral

$$\int\!\!\int f(x, y)\,dP.$$

Für $\Delta x = 0$ gehen, da y_0 und y_1 stetige Funktionen von x sind, y_0' und y_1' in y_0 und y_1 über, also auch das Integral

$$\int_{y_0'}^{y_1'} f(x, y)\,dy \quad \text{in} \quad \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy.$$

Also wird die rechte Seite von (3) einfach

$$\lim_{\Delta x = 0} S \Delta x \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy = \int dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy.$$

Das Integral nach x bezieht sich auf alle Werte, welche die Abscisse x für die Punkte des Gebietes P annehmen kann; wenn also x_0 und x_1 die Abscissen sind, welche zu den Ordinaten CA, DB gehören, durch welche die Randkurve der Fläche P begrenzt wird, so ist:

$$V = \int\int_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy.$$

Die analogen Beziehungen gelten, wenn man die Summation der Elemente von V' in der anderen Reihenfolge vollzieht, also

$$V' = S \Delta y\, S f(x, y)\, \Delta x$$

setzt und nun zuerst Δx, sodann Δy null werden läſst. Man erhält auf diese Weise, falls die Begrenzungskurve auch von den Parallelen zur x-Axe höchstens in zwei Punkten geschnitten wird:

$$V = \lim V' = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx;$$

die Bedeutung der Grenzen ist aber hier eine durchaus andere wie vorhin; x_0 und x_1 sind Funktionen von y und bedeuten die beiden Abscissenwerte der Punkte, in denen die im Abstande y zur x-Axe parallele Gerade die Randkurve von P schneidet, während y_0 und y_1 konstante Werte sind, und die beiden äuſsersten Werte von y bezeichnen, welche die Punkte des Gebietes P besitzen.

Sonach ist bewiesen:

Der Wert des Doppelintegrales $\int\int f(x, y)\, dP$ *läſst sich durch zwei successive Integrationen berechnen:*

$$\int\int f(x, y)\, dP = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y)\, dx,$$

wenn die Randkurve des ebenen Gebietes P stetig und so beschaffen ist, daſs sie von den Parallelen zur x-Axe und von

denen zur y-Axe immer nur in zwei Punkten geschnitten wird. Die Grenzen in diesen beiden zweifachen Integralen sind verschieden und durch die Koordinaten der Begrenzungskurve von P bestimmt.

Wenn die Fläche P ein Rechteck ist, dessen Seiten der x- und der y-Axe parallel laufen, und es erstreckt sich die eine Seite von x_0 bis x_1, die andere von y_0 bis y_1, so sind x_0, x_1, y_0, y_1 sämtlich Konstanten, also:

$$\int\int f(x, y)\, dP = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich der in Nr. 484 unter einer engeren Bedingung bewiesene Satz:

Wenn die Funktion $f(x, y)$ innerhalb der konstanten Grenzen x_0 und x_1, y_0 und y_1 stetig ist, so ist der Wert dieses Doppelintegrales gleich dem Werte, welcher sich durch successive Integration nach x und nach y ergiebt; die Reihenfolge, in welcher diese beiden Integrationen ausgeführt werden, ist ohne Einfluſs auf das Resultat.

§ 3. Anwendungen.

578. Bestimmung der Grenzen. Es sei ein Körper von allen Seiten von einer stetigen Fläche eingeschlossen, und das Koordinatensystem sei so gelegt, daſs die xy-Ebene den Körper nicht durchschneidet. Wir nehmen ferner an, daſs die zur z-Axe parallelen Geraden die Oberfläche des Körpers in nicht mehr als zwei Punkten durchschneiden; denn die Fälle, in denen die Oberfläche auch in mehr als zwei Punkten, jedoch immer noch in einer endlichen Anzahl, von diesen Geraden durchschnitten wird, lassen sich durch Zerlegung des Körpers in mehrere Teile auf diesen einfacheren zurückführen. Bestimmt man alsdann den Cylinder, dessen Erzeugende der z-Axe parallel sind und welcher die Oberfläche des gegebenen Körpers berührt, so ist seine Basis auf der xy-Ebene die Fläche P. Zu jedem Punkte im Innern von P gehören zwei Ordinatenwerte z_0 und z_1, bestimmt durch die Punkte, in denen diese Geraden in den Körper ein- und austreten. Das Volumen des Körpers wird alsdann:

$$\iint z_1\,dx\,dy - \iint z_0\,dx\,dy = \iint (z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

oder, wenn wir zuerst nach y, dann nach x integrieren, gleich

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dy.$$

Die Ordinaten z_0 und z_1, die einem bestimmten Wertepaar (x, y) entsprechen, berechnen sich als die beiden Wurzeln der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

welche die Oberfläche des Körpers definiert. Die Punkte dieser Fläche, in denen die Tangentenebene parallel zur z-Axe ist, genügen der Gleichung:

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0,$$

und die Elimination von z zwischen diesen beiden Gleichungen giebt die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

der Randkurve von P. Aus dieser Gleichung hat man bei jedem Werte von x die Werte y_0 und y_1 zu bestimmen. Die Grenzen x_0 und x_1 der schliefslichen Integration nach x sind diejenigen Werte, welche zu den beiden Flächenpunkten gehören, in denen die Tangentenebene parallel zur yz-Ebene ist; für diese Punkte erhält man also die drei Gleichungen:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

579. Polarkoordinaten. Die Flächenelemente ΔP seien bestimmt durch ein System von konzentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist, und durch die Radien, welche von diesem Punkte ausgehen. Sind ϱ und $\varrho + \Delta\varrho$ zunächst die Radien zweier auf einander folgender Kreise, ω und $\omega + \Delta\omega$ die Winkel, welche zu zwei auf einander folgenden Radien gehören, so ist:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\left[(\varrho + \Delta\varrho)^2 - \varrho^2\right]\Delta\omega = \varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\omega + \frac{1}{2}(\Delta\varrho)^2\,\Delta\omega$$

und

$$V = \lim S(z_1 - z_0)\left[\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\omega + \frac{1}{2}(\Delta\varrho)^2\,\Delta\omega\right],$$

wo der Limes für verschwindende $\Delta\varrho$ und $\Delta\omega$ zu bilden ist. Dieser zerfällt in zwei Summanden:

$$V = \lim S(z_1 - z_0)\,\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\omega + \frac{1}{2}\lim S(z_1 - z_0)(\Delta\varrho)^2\,\Delta\omega,$$

von denen der zweite verschwindet. In der That, nennt man M das Maximum von $|z_1 - z_0|$ im Gebiete P, so wird

$$S(z_1 - z_0)(\Delta\varrho)^2 < MS(\Delta\varrho)^2.$$

Ist δ der gröfste der Werte $\Delta\varrho$, so folgt:

$$\lim S(z_1 - z_0)(\Delta\varrho)^2 < M \lim \delta \cdot S\Delta\varrho$$

oder

$$\lim S(z_1 - z_0)(\Delta\varrho)^2 \leqq M \lim \delta \cdot (\varrho_1 - \varrho_0),$$

wenn ϱ zwischen den Grenzen ϱ_0 und ϱ_1 variiert.

Da $\lim \delta = 0$ ist, so folgt

$$\lim S(z_1 - z_0)(\Delta\varrho)^2 = 0$$

und damit die Behauptung.

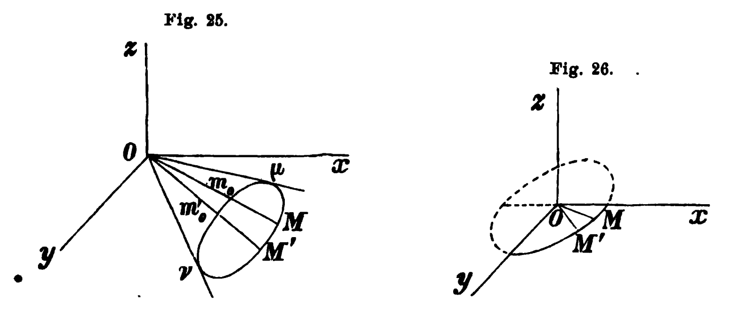
Es wird also:

$$V = \lim S(z_1 - z_0)\,\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\omega.$$

Die rechte Seite ist aber nichts anderes als das Doppelintegral

$$\iint (z_1 - z_0)\,\varrho\,d\varrho\,d\omega,$$

erstreckt über alle Wertepaare (ϱ, ω), welche unserem Gebiete P angehören. In der That ist ja die Definition des Doppelintegrales in Nr. 576 eine rein analytische und unab-



hängig davon, ob wir die beiden Variablen der zu integrierenden Funktion als rechtwinklige oder als Polarkoordinaten deuten. Nur müssen wir auch hier voraussetzen, dafs z_1 und z_0 stetige Funktionen von ϱ und ω sind.

Um die Integration auszuführen, integrieren wir zuerst nach ϱ, dann nach ω. Liegt der Anfangspunkt des Koordinatensystemes aufserhalb der Fläche P, und schneiden die Radien, welche von ihm ausgehen, die Begrenzungskurve nur in zwei Punkten, so wird das innere Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} (z_1 - z_0)\, \varrho\, d\varrho\,,$$

wenn man mit ϱ_0 und ϱ_1 die beiden Radien bezeichnet, welche zum Winkel ω gehören. Dieses ist noch nach ω zwischen den Grenzen ω_0 und ω_1 zu integrieren, die zu den Radien $O\mu$ und $O\nu$ gehören, welche die Begrenzung von P berühren. Es wird also

$$V = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} (z_1 - z_0)\, \varrho\, d\omega.$$

Liegt hingegen der Koordinatenanfangspunkt im Innern der Fläche P, so ist die erste Integration von 0 bis zu dem Werte ϱ_1 auszuführen, welcher bei jedem einzelnen Werte von ω der Randkurve von P angehört, und die zweite Integration von 0 bis 2π; also ist:

$$V = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\varrho_1} (z_1 - z_0)\, \varrho\, d\varrho.$$

580. Erstes Beispiel. Als erstes Beispiel dieser allgemeinen Theorie betrachten wir die Aufgabe, welche schon in Nr. 570 gelöst wurde. Es handelt sich hierbei um das Volumen V, welches zwischen den Flächen liegt, deren Gleichungen

$$az = xy, \qquad x + y + z = a, \qquad z = 0$$

sind. Die Fläche P ist hier das rechtwinklige Dreieck, welches von der x-Axe, der y-Axe und der Geraden $x + y = a$ begrenzt wird. Man erhält sonach, wenn man die Integration nach y zuerst ausführt:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = a - x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = a.$$

Die Ordinate z_0 ist null, das ist der Wert, der durch die dritte der obigen Flächengleichungen geliefert wird. Die beiden anderen geben

$$z = \frac{xy}{a}, \qquad z = a - x - y,$$

und der kleinere dieser beiden Werte mufs jedesmal für z gewählt werden in der Gleichung:

$$V = \int_0^a dx \int_0^{a-x} z_1\, dy.$$

Also hat man $z_1 = \frac{xy}{a}$, solange

$$\frac{xy}{a} < a - x - y \quad \text{oder} \quad y < \frac{a(a-x)}{a+x},$$

dagegen $z_1 = a - x - y$, solange

$$\frac{xy}{a} > a - x - y \quad \text{oder} \quad y > \frac{a(a-x)}{a+x}.$$

Folglich ist:

$$\int_0^{a-x} z_1\, dy = \int_0^{\frac{a(a-x)}{a+x}} \frac{xy}{a}\, dy + \int_{\frac{a(a-x)}{a+x}}^{a-x} (a - x - y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{ax(a-x)^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{2}\frac{x^2(a-x)^2}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}\frac{x(a-x)^2}{a+x},$$

und
$$V = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}\, dx = \left(\frac{17}{12} - l(4)\right) a^3.$$

Man sieht, dafs das Volumen V aus zwei Teilen besteht, von denen der eine durch das gegebene Paraboloid, der andere von der gegebenen Ebene begrenzt ist.

581. Zweites Beispiel. *Gegeben ist in rechtwinkligen Koordinaten der Cylinder, dessen Gleichung* $y^2 + \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$ *ist; es soll das Volumen bestimmt werden desjenigen Teiles vom Cylinder, welcher zwischen der xy-Ebene und der Kugel:* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *enthalten ist.*

Führt man Polarkoordinaten ρ und ω an Stelle von x und y ein, so erhält die Kugel die Gleichung: $z^2 = R^2 - \rho^2$, und die Basis des Cylinders die Gleichung: $\rho = R\cos\omega$. Der Ausdruck für das gesuchte Volumen wird also, indem man zunächst die Hälfte betrachtet und diese verdoppelt:

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \sqrt{R^2 - \varrho^2}\,\varrho\,d\varrho;$$

das Integral $\int \sqrt{R^2 - \varrho^2}\,\varrho\,d\varrho$ ist gleich $-\frac{1}{3}(R^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const}$, also ist:

$$V = \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\omega)\,d\omega = \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\omega + \sin\omega\cos^2\omega)\,d\omega.$$

Dieses Integral ist gleich $\left(\omega + \cos\omega - \frac{1}{3}\cos^3\omega + \text{const}\right)$, also ist:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{4}{9}R^3.$$

Der Überschufs der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi R^3$ über das Volumen $2V$ des in derselben enthaltenen Cylinderteiles ist also gleich $\frac{8}{9}R^3$.

582. Anwendung auf ein bestimmtes Integral. Die Betrachtung der Volumina, welche durch Doppelintegrale gemessen werden, läfst sich mit Vorteil bei der Lösung verschiedener Fragen anwenden; ein Beispiel dieser Art haben wir in Nr. 577 kennen gelernt, wo wir zu einem natürlichen Beweise für die Regel der Integration unter dem Integralzeichen gelangten. Wir wollen hier noch zwei andere Beispiele betrachten.

Als erstes wählen wir das Verfahren, welches Poisson (und ebenso Gauss) zur Bestimmung des Integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

benutzte, das wir in Nr. 502 behandelt haben, und das nichts anderes ist als das Eulersche Integral $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Die Fläche $z = e^{-(x^2+y^2)}$ überdeckt die gesamte xy-Ebene, und das Volumen, welches sie zusammen mit dieser unendlichen Ebene einschliefst, ist durch das Doppelintegral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

zu bestimmen.

Erstrecken wir die Integration zunächst über das *Quadrat,* dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegt und dessen Seiten den Axen parallel sind und die Länge $2a$ haben, so erhalten wir das Integral

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy$$

oder, da der Integrationsbuchstabe keinen Einfluſs auf das Resultat hat:

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Erstrecken wir andrerseits unser Doppelintegral über einen *Kreis* mit dem Radius R, dessen Mittelpunkt wieder der Koordinatenanfang ist, so erhalten wir durch Einführung von Polarkoordinaten (Nr. 579):

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R} e^{-\varrho^2}\varrho\,d\varrho = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Nun ist aber der Flächeninhalt des betrachteten Quadrates zwischen dem des eingeschriebenen Kreises mit dem Radius a und dem des umgeschriebenen mit dem Radius $a\sqrt{2}$ enthalten. Wir haben also:

$$\pi(1 - e^{-a^2}) < \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \pi(1 - e^{-2a^2})$$

und für $a = \infty$, wo beide Grenzen den Wert π annehmen:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi$$

oder:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

wie in Nr. 502 bereits gefunden wurde.

583. Ein Satz von Dirichlet. Als zweites Beispiel wollen wir noch eine merkwürdige Formel beweisen, welche Dirichlet in seinen Abhandlungen benutzt, nämlich die folgende:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dy;$$

$f(x, y)$ bezeichnet hier eine beliebige in dem ganzen Integrationsgebiete endliche und wenigstens stückweise stetige Funktion. Es handelt sich hier also um eine doppelte Integration, bei welcher die Grenzen für das Integral nach y nicht beide unabhängig sind von der anderen Variabelen. Zum Beweise dieser Gleichung betrachte man x, y und $f(x, y)$ als die drei rechtwinkligen Koordinaten einer Fläche. Alsdann sieht man gleich, dafs jedes der beiden zweifachen Integrale das Volumen darstellt zwischen der genannten Fläche, der xy-Ebene und den drei dazu rechtwinkligen Ebenen: $x = a$, $y = 0$, $y = x$.

§ 4. Die Quadratur krummer Flächen.

584. Definition der Oberfläche. Mit einer geraden Linie kann man nur eine andere gerade Linie oder eine Summe von solchen unmittelbar vergleichen. Wir mufsten daher auch die gebrochene gerade Linie genau definieren, deren Grenze die *Länge eines Kurvenbogens* bestimmt. Analoge Betrachtungen müssen wir hier anwenden, um festzustellen, was wir unter der *Gröfse* eines bestimmten Teiles einer krummen Fläche zu verstehen haben.

Wir können immer annehmen, dafs der Teil der krummen Fläche, um welchen es sich handelt, durch eine Kurve begrenzt ist; denn wenn eine geschlossene Oberfläche zu bestimmen ist, so zerlegt man die Fläche in zwei oder mehrere Teile, deren jeder von einer geschlossenen Kurve begrenzt ist und einzeln berechnet werden kann.

Es sei nun ein Teil der krummen Fläche begrenzt durch eine Kontour C'. Wir schreiben der Fläche eine beliebige Polyederfläche ein, welche aus lauter Dreiecken besteht und durch ein Polygon Γ begrenzt ist, das schliefslich in die

Kontour C' übergeht. *Als Gröfse der krummen Fläche definieren wir nun die Grenze F, nach welcher die Oberfläche des Polyeders konvergiert, wenn wir die Seitenflächen desselben insgesamt in ihren linearen Dimensionen beliebig klein werden lassen, so jedoch, dafs die Winkel in jedem Dreiecke bestimmte, von* 0 *und* π *verschiedene Werte erlangen.**)

Wir wollen zeigen, dafs im Allgemeinen die Grenze S existiert und unabhängig ist von dem Gesetze, nach welchem die Seiten des eingeschriebenen Polyeders beliebig verkleinert werden.

Unsere Fläche sei auf rechtwinklige Koordinaten x, y, z bezogen und durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

gegeben. Die Kontour C', welche das zu berechnende Flächenstück F einschliefst, möge, auf die xy-Ebene projiziert, eine stetige geschlossene Kurve C ergeben, welche sich selbst nicht schneidet und das ebene Flächenstück P einschliefst. In dem Gebiete P sei f nebst seinen partiellen Ableitungen nach x und y stetig. Wir zerlegen P in Dreiecke von der Gröfse ΔP; in der Umgebung der Randkurve werden diese Dreiecke von der Kurve durchschnitten. Den Eckpunkten eines Dreieckes entsprechen drei Punkte auf der Fläche, durch welche ein Dreieck $\Delta' P$ bestimmt ist, welches eine Seitenfläche des eingeschriebenen Polyeders bildet. Wir nehmen an, dafs keines dieser Flächenstücke $\Delta' P$ auf der xy-Ebene senkrecht steht. Alsdann wird der Inhalt eines solchen Dreieckes

$$\Delta' P = \frac{\Delta P}{\cos\alpha},$$

wenn man mit α den Winkel bezeichnet, welchen die betreffende Polyederfläche mit der xy-Ebene bildet. Es ist sonach die Oberfläche des Polyeders gleich:

---

*) Auf die Notwendigkeit, den Grenzprozefs für die Polyederflächen so einzuschränken, dafs, kurz gesagt, jedes unendlich kleine Dreieck zuletzt in die Tangentenebene fällt, hat Herr Schwarz aufmerksam gemacht. Vergl. die Mitteilung in dem *Cours de M. Hermite, pendant le 2. Sem. 1881—1882, second tirage pag. 35;* auch *H. A. Schwarz, Mathematische Abhandlungen Bd. II, p. 309.* Daselbst ist an einem instruktiven Beispiele gezeigt, wie das einem Cylinder eingeschriebene Polyeder ohne solche Festsetzung einen beliebigen Grenzwert annimmt.

$$(1) \qquad S\Delta' P = S\frac{\Delta P}{\cos\alpha},$$

und es ist der Grenzwert zu bestimmen, welchen diese Summe für verschwindende ΔP erhält. Analog wie in Nr. 577 überzeugt man sich leicht, daſs bei der Summation $S\frac{\Delta P}{\cos\alpha}$ die Dreiecke am Rande der Kontour C vernachlässigt werden können, da sie beim Grenzübergang nur einen verschwindenden Beitrag liefern.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, wollen wir jetzt eine besonders bequeme Einteilung unseres Gebietes P zu Grunde legen. Wir denken uns dasselbe zunächst durch Parallelen zur x- und zur y-Axe in Rechtecke und dann jedes von ihnen durch eine Diagonale in zwei Dreiecke ΔP zerlegt. Bedeuten dann x, y die Koordinaten einer Dreiecksecke am rechten Winkel, so werden die der beiden anderen $x + \Delta x, y$ und $x, y + \Delta y$, und die Werte von z an diesen drei Ecken werden bezw.

$$z, \quad z + \Delta_x z, \quad z + \Delta_y z,$$

wobei

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

gesetzt ist. Alsdann wird die Ebene des Dreieckes $\Delta' P$, welches dem soeben fixierten Dreieck ΔP entspricht, durch die Gleichung gegeben:

$$\zeta - z = \frac{\Delta_x z}{\Delta x}(\xi - x) + \frac{\Delta_y z}{\Delta y}(\eta - y);$$

ξ, η, ζ bedeuten natürlich die laufenden Koordinaten eines Punktes der Ebene.

Nun wird nach dem Mittelwertsatze (Nr. 28):

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x'(\bar{x}, y)\cdot\Delta x,$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y'(x, \bar{y})\cdot\Delta y,$$

wo $\bar{x}$ zwischen x und $x + \Delta x$, $\bar{y}$ zwischen y und $y + \Delta y$ liegt, also:

$$\zeta - z = f_x'(\bar{x}, y)(\xi - x) + f_y'(x, \bar{y})(\eta - y),$$

und der Winkel α dieser Ebene mit der xy-Ebene wird gegeben durch:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\bar{x}, y) + f_y'^2(x, \bar{y})}}.$$

Mithin wird die gesuchte Oberfläche der Grenzwert von:

$$S\Delta' P = S\sqrt{1 + f_x'^2(\bar{x}, y) + f_y'^2(x, \bar{y})} \cdot \Delta P.$$

Da nun aber für verschwindende Δx und Δy $\bar{x}$ mit x, $\bar{y}$ mit y zusammenfällt, so wird

$$\lim \sqrt{1 + f_x'^2(\bar{x}, y) + f_y'^2(x, \bar{y})} = \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$$

und daher:

$$F = \lim S\Delta' P = \lim S\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} \cdot \Delta P$$

oder

$$F = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

wobei die Integration über das Gebiet P zu erstrecken ist. Somit ist der Satz bewiesen:

Satz. *Der Inhalt F eines Stückes der Fläche $z = f(x, y)$, welches von einer Kontour C' begrenzt ist, wird durch das Integral gegeben*

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

wobei die Integration über die Projektion P des Flächenstückes auf die xy-Ebene zu erstrecken ist. Vorausgesetzt ist dabei, dafs das Gebiet P von einer stetigen, geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Kurve C begrenzt ist und dafs in ihm $f(x, y)$ nebst seinen ersten Ableitungen stetig ist.

585. Folgerungen. Aus der Gleichung für die Oberfläche $z = f(x, y)$, nämlich

$$(1) \quad F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP = \iint \frac{dP}{\cos\alpha},$$

in welcher α den Winkel bedeutet, den die Tangentialebene eines Flächenpunktes mit der xy-Ebene bildet, lassen sich noch einige Folgerungen ziehen. Es seien α_0 und α_1 der gröfste und der kleinste unter den Werten α, die selbst zwischen 0 und 90° liegen, innerhalb oder an den Grenzen der Kontour C, so giebt die obige Formel:

$$F = \frac{1}{\cos\alpha'} \iint dP = \frac{P}{\cos\alpha'},$$

wenn man mit α' einen Winkel zwischen α_0 und α_1 bezeichnet und mit P die ebene Fläche, welche durch die normale Projektion von C', also durch die Kurve C begrenzt ist. Diese Gleichung gilt, wie klein auch die Fläche P genommen wird; es ist:

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{\cos \alpha'}.$$

Nehmen wir nun an, dafs das Gebiet P sich auf einen Punkt P zusammenzieht, in welchem die Tangentenebene sich stetig ändert, so verschwindet auch F, während α' mit α zusammenfällt. Bezeichnen wir daher den Grenzwert, den dabei der Quotient $\frac{F}{P}$ annimmt, mit $\frac{dF}{dP}$, so wird

$$(2) \qquad \frac{dF}{dP} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \text{oder} \quad dF = \frac{dP}{\cos \alpha}, \quad \text{d. h.:}$$

Es wird jeder unendlich kleine Teil der Fläche gleich seiner normalen Projektion auf die xy-Ebene, dividiert durch den Kosinus des Winkels, den die Tangentenebene des Flächenelementes mit der xy-Ebene einschliefst. Dabei bedeutet das Wort „unendlich klein“ lediglich, dafs unser Satz im Grenzfalle exakt gilt, wenn alle Dimensionen der fraglichen Figur verschwinden. In ähnlicher Weise wurde das Wort „unendlich klein“ schon in Nr. 322 gebraucht. Auch später werden wir uns noch öfter dieser Redeweise bedienen.

Die Gleichung (1) gilt auch dann noch, wenn in einigen oder in allen Punkten der Kontour C' die Tangentenebene senkrecht zur xy-Ebene steht, also die Gröfsen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ einzeln oder beide unendlich werden. Man hat alsdann ein Doppelintegral zu bilden, in welchem die zu integrierende Funktion an den Grenzen unendlich wird. Setzt man nun an Stelle der Kontour C' eine andere innerhalb C' gelegene Kurve, so wird für diese das ebene Gebiet P_1 erhalten, und es ist die zugehörige Flächengröfse:

$$F_1 = \int\!\!\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP_1.$$

Läfst man nun P_1 immer mehr in die Fläche P übergehen, so konvergiert F_1 nach einem bestimmten Grenzwerte

F_1, der ganz unabhängig ist von der Art dieses Prozesses; also wird:

$$F = \lim \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP_1 \quad (\text{für } P_1 = P).$$

Damit haben wir zugleich die Definition gewonnen für ein Doppelintegral, bei welchem die Funktion an den Grenzen unendlich wird und bei welchem der schliefsliche Wert des Integrales ganz unabhängig ist von der Art, wie man zu diesen Grenzen übergeht.

586. Bestimmung der Grenzen für rechtwinklige Koordinaten. Der Wert des Doppelintegrales

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dP,$$

wobei $dz = p\,dx + q\,dy$ gesetzt ist, kann nun bestimmt werden, indem man an Stelle der Elemente dP, welche wir uns bisher als Dreiecke dachten, irgend welche andere ebene Flächenelemente setzt. Nehmen wir also wiederum an, dafs die Kontour C des ebenen Gebietes P von den Parallelen zur x- und zur y-Axe immer nur in zwei Punkten geschnitten wird, und zerlegen wir das Gebiet P durch diese Parallelen in Rechtecke, so wird $dP = dx\,dy$ und

$$(3) \begin{cases} \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} dx \int\limits_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy \\ \qquad = \int\limits_{y_0'}^{y_1'} dy \int\limits_{x_0'}^{x_1'} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx. \end{cases}$$

y_0 und y_1 bezeichnen dann die beiden Ordinaten der Randkurve, welche zu einem Abscissenwert x gehören, sie sind im allgemeinen Funktionen von x, während x_0 und x_1 konstante Werte bedeuten, nämlich die extremen Abscissen der Kurve. Dagegen sind x_0' und x_1' die zu einer Ordinate y gehörigen Abscissen, y_0' und y_1' die extremen Ordinaten der Randkurve.

587. Polarkoordinaten. Substituiert man an Stelle von x, y die Polarkoordinaten ϱ, ω, indem $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$

gesetzt wird, so kann man $\varrho\, d\varrho\, d\omega$ als Element dP wählen (Nr. 579). Liegt also der Anfangspunkt der Koordinaten aufserhalb der Kurve C, und schneidet jeder Radius ϱ dieselbe höchstens in zwei Punkten, so erhält man:

$$(4) \qquad F = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\alpha};$$

ϱ_0 und ϱ_1 sind die Radien der Kurvenpunkte auf C, welche zu demselben Werte ω gehören, ω_0 und ω_1 bezeichnen diejenigen Werte von ω, welche zu den diese Kurve begrenzenden Radien gehören. Diese Formel ist auch anwendbar auf den Fall, dafs die Kontour C aus zwei geschlossenen Kurven besteht, von denen die eine innerhalb der andern liegt. Befindet sich der Koordinatenanfangspunkt im Innern der kleineren Kurve, so wird, da die Projektion der Fläche F das ringförmige Gebiet zwischen den beiden geschlossenen Kurven ist:

$$(5) \qquad F = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\alpha}.$$

Zieht sich die innere Kurve auf den Koordinatenanfangspunkt zusammen, so wird $\varrho_0 = 0$ und

$$(6) \qquad F = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\varrho_1} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\alpha}.$$

Der Kosinus des Winkels α läfst sich leicht durch die partiellen Ableitungen von z nach ϱ und ω ausdrücken; denn es ist:

$$dx = d\varrho \cos\omega - \varrho \sin\omega\, d\omega, \qquad dy = d\varrho \sin\omega + \varrho \cos\omega\, d\omega,$$

also:

$$dz = (p\cos\omega + q\sin\omega)\, d\varrho + (-p\sin\omega + q\cos\omega)\, \varrho\, d\omega,$$

folglich:

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = p\cos\omega + q\sin\omega, \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \omega} = -p\sin\omega + q\cos\omega,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 = p^2 + q^2,$$

und

$$\frac{\varrho}{\cos\alpha} = \varrho\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2}$$

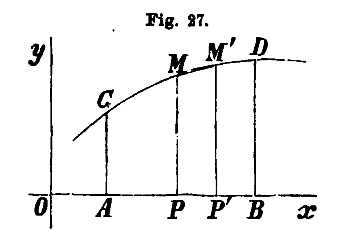
Demnach ist:

$$F = \int\int \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2}\, d\varrho\, d\omega, \tag{7}$$

wobei die Grenzen unbestimmt bleiben, um alle Fälle zu umfassen.

588. Die Rotationsflächen. Bei den Rotationsflächen läßt sich das Doppelintegral, welches die Größe einer Zone zwischen zwei zur Rotationsaxe rechtwinkligen Ebenen bestimmt, unmittelbar auf ein einfaches Integral zurückführen. Es sei CMD eine Kurve, die auf zwei rechtwinklige Axen Ox und Oy bezogen ist; es soll die Fläche F der Zone bestimmt werden, die von dem Bogen CD bei der Rotation um die x-Axe erzeugt wird. Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Ordinate y der Kurve beständig wächst oder beständig abnimmt, wenn man von dem einen Endpunkte des Bogens CD zum andern übergeht. Die gesuchte Fläche F hat alsdann zur Projektion auf die zur Rotationsaxe senkrechte Ebene den konzentrischen Kreisring, welcher mit dem Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt von den beiden extremen Ordinaten des Bogens $CA = y_0$, $DB = y_1$ beschrieben wird. Man kann hier also die Formel (5) des vorigen Paragraphen anwenden, indem man y an Stelle von ϱ schreibt, und für α den Winkel einsetzt, den die Tangentenebene der Fläche mit der zur Rotationsaxe senkrechten Ebene bildet. Es ist also:

Fig. 27.



$$F = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\cos\alpha}.$$

Nach der Beschaffenheit der Fläche aber hängt α nicht von ω ab; es ist also das innere Integral von ω ganz unabhängig und folglich:

$$F = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\cos\alpha} = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\cos\alpha}.$$

Da die Tangentialebene der Rotationsfläche senkrecht zur Ebene der Meridiankurve steht, so ist α der Winkel, welchen die Tangente der Meridiankurve mit der y-Axe bildet; folglich ist $\cos\alpha = \pm \frac{dy}{ds}$, wenn ds das Differential des Bogens dieser Kurve bedeutet. Also wird:

$$F = \pm 2\pi \int_{y_0}^{y_1} y \frac{ds}{dy} dy.$$

Das Zeichen $\pm$ mufs durch das Zeichen von $y_1 - y_0$ ersetzt werden. Nennt man x_0 und $x_1 > x_0$ die Abscissen, welche zu den Ordinaten y_0 und y_1 gehören, so kann man auch schreiben:

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \frac{ds}{dx} dx.$$

Es ist leicht zu sehen, dafs diese letzte Formel auch gilt, wenn in der Kurve CD eine Änderung der Ordinaten y vom Wachstum zur Abnahme und umgekehrt an einer beliebigen endlichen Anzahl von Stellen stattfindet. Denn alsdann kann man die Kurve in Teile zerlegen, so dafs in jedem Teile die Ordinaten sich nur in demselben Sinne ändern, und da die Gleichung für jeden dieser Teile gilt, so gilt sie auch für ihre Summe.

589. Oberfläche des Rotationsellipsoides. Es sei eine Zone des Rotationsellipsoides zu bestimmen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sei die Gleichung der Ellipse, welche die Fläche bei der Rotation um die x-Axe erzeugt. Es wird:

$$y \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2};$$

die Fläche, welche von dem Ellipsenbogen erzeugt wird, dessen einer Endpunkt der Scheitelpunkt auf der Halbaxe b ist und dessen anderer Endpunkt die Abscisse x hat, wird also gleich:

$$F = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}\, dx.$$

Die Fälle $a > b$ und $a < b$ sind dabei zu unterscheiden. Ist $a > b$, so entsteht das Rotationsellipsoid durch Rotation um die große Axe. Es ist:

$$2\int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2} + \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}}{a^2},$$

also:

$$F = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}}{a^2}.$$

Will man die gesamte Fläche bestimmen, so ist $x = a$ zu setzen und das Resultat zu verdoppeln, also wird:

$$F = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}$$

oder, wenn man $b = a \cos \frac{\gamma}{2}$ setzt:

$$F = 2\pi b^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\sin \gamma}\right).$$

Ist $b = a$, also $\gamma = 0$, so wird das Ellipsoid eine Kugel und man erhält die bekannte Formel $F = 4\pi a^2$.

Ist $a < b$, so entsteht das Ellipsoid durch Rotation um die kleinere Axe, es ist ein abgeplattetes; der Wert von F ist:

$$F = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)\,x^2}\,dx$$

oder:

$$F = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)\,x^2}}{a^2} + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\, \frac{x\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)\,x^2}}{a^2};$$

setzt man $x = a$ und multipliziert alsdann mit 2, so erhält man die ganze Fläche des Ellipsoides, nämlich:

$$F = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\, \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

Für

$$b = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)$$

wird diese Formel:

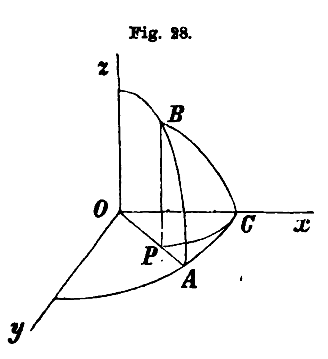
$$F = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{\gamma}{\frac{1}{2}(e^\gamma - e^{-\gamma})}\right].$$

Für $b = a$, also $\gamma = 0$, reduziert sie sich auf $4\pi a^2$, die Oberfläche der Kugel.

590. Oberfläche des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes. Da jedes sphärische Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, indem man von der einen Ecke aus den gröfsten Kreis konstruiert, welcher senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite steht, so brauchen wir blos den Fall des rechtwinkligen Dreieckes zu untersuchen.

Es sei ABC das sphärische Dreieck, rechtwinklig bei A, welches wir auf drei rechtwinklige Axen beziehen, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Zur xy-Ebene wählen wir die Ebene der Seite AC und lassen die x-Axe durch den Scheitelpunkt C gehen. Die Linie OA ist die Projektion der Seite AB auf die xy-Ebene, und wenn man vom Scheitel B die Senkrechte BP auf OA fällt, so projiziert sich der Kreisbogen BC in den Ellipsenbogen PC. Es ist also die Fläche auf der Kugel zu bestimmen, deren ebene Projektion das krummlinige Dreieck ACP ist.

Fig. 28.



Die Gleichung der Kugel ist $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ und die der Ebene OBC $z = y \operatorname{tang} C$; dabei bedeutet C den Winkel des sphärischen Dreieckes an der gleichnamigen Ecke. Eliminiert man z zwischen diesen Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Ellipse, nämlich

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 C} = R^2,$$

und hieraus folgt, wenn man x und y durch die Werte $\varrho_0 \cos \omega$ und $\varrho_0 \sin \omega$ ersetzt:

$$\varrho_0 = \frac{R \cos C}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2 \omega}}.$$

Der Kosinus des Winkels, den die Tangentenebene der Kugel mit der xy-Ebene bildet, ist $\frac{z}{R}$ oder $\frac{\sqrt{R^2-\varrho^2}}{R}$, und das Element der sphärischen Fläche wird also

$$\frac{R\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}.$$

Die Integration nach ϱ mufs von dem Werte ϱ_0, welcher zur Ellipse gehört, bis zu dem Werte $\varrho = R$ ausgeführt werden; die Integration nach ω erstreckt sich von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{b}{R}$, wenn b die Länge der Seite AC ist; also ist der Ausdruck für die gesuchte Fläche:

$$F = \int_0^{\frac{b}{R}} d\omega \int_{\varrho_0}^{R} \frac{R\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}.$$

Nun ist

$$\int_{\varrho_0}^{R} \frac{R\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}} = R\sqrt{R^2-\varrho_0^2} = \frac{R^2 \sin C \sin\omega}{\sqrt{1-\sin^2 C\cos^2\omega}},$$

also

$$F = \int_0^{\frac{b}{R}} \frac{R^2 \sin C \sin\omega\, d\omega}{\sqrt{1-\sin^2 C\cos^2\omega}}.$$

Das unbestimmte Integral dieses Differentiales ist

$$-R^2 \arcsin(\sin C\cos\omega) + \text{const.};$$

man erhält demnach:

$$F = R^2\left[C - \arcsin\left(\sin C\cos\frac{b}{R}\right)\right].$$

Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist aber $\sin C\cos\frac{b}{R}$ gleich $\cos B$ oder auch gleich $\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$, und folglich wird

$$F = R^2\left(B + C - \frac{\pi}{2}\right).$$

591. Ein weiteres Beispiel. Gegeben ist die Kugel in rechtwinkligen Koordinaten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Es soll der Teil der Kugelfläche bestimmt werden, dessen Projektion auf die xy-Ebene das Innere der Kurve wird, die in Polarkoordinaten die Gleichung hat:

$$\varrho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tang}^2 \omega)}.$$

Das Element der Kugelfläche wird, da $R = 1$ ist:

$$\frac{\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{1 - \varrho^2}}.$$

Die gegebene Kurve ist symmetrisch in Bezug auf die x- und die y-Axe. Man braucht also blos die sphärische Fläche zu bestimmen, welche sich auf einen dieser Quadranten projiziert, denjenigen, welcher zu den Werten ω von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ gehört. Der Radiusvektor der Kurve ist gröfser als 1 für alle Werte von ω zwischen 0 und $\frac{\pi}{6}$, aber kleiner als 1 für die Werte von $\frac{\pi}{6}$ bis $\frac{\pi}{4}$. Mithin besteht die zu bestimmende Fläche aus zwei Teilen, nämlich aus demjenigen, der sich in den Kreissektor mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ projiziert, und demjenigen, der sich in das Segment der Kurve projiziert, dessen Sehne mit der x-Axe den Winkel $\frac{\pi}{6}$ bildet. Für den ersten Teil müssen die Integrationen von $\varrho = 0$ bis $\varrho = 1$ und von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\pi}{6}$ ausgeführt werden; für den zweiten mufs die eine Integration von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tang}^2 \omega)}$ und die andere von $\omega = \frac{\pi}{6}$ bis $\omega = \frac{\pi}{4}$ genommen werden. Also ist:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\omega \int_0^1 \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tang}^2 \omega)}} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{3}{2} \operatorname{tang}^2 \omega - \frac{1}{2}}\, d\omega.$$

Nun ist

$$\int\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tang}^2\omega-\frac{1}{2}}\,d\omega=\int\frac{\frac{3}{2}\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tang}^2\omega-\frac{1}{2}}}-\int\frac{2\cos\omega\,d\omega}{\sqrt{2\sin^2\omega-\frac{1}{2}}}.$$

Das erste Integral hat den Wert

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,l\left(\operatorname{tang}\omega+\sqrt{\operatorname{tang}^2\omega-\frac{1}{3}}\right)+\text{const.},$$

das zweite den Wert

$$\sqrt{2}\,l\left(\sin\omega+\sqrt{\sin^2\omega-\frac{1}{4}}\right)+\text{const.},$$

und hieraus folgt:

$$F=\frac{\pi}{6}+\sqrt{2}\,l(\sqrt{2}+1)-\sqrt{\frac{3}{2}}\,l(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

§ 5. Transformation der Variablen in Doppelintegralen.

592. Analytische Ableitung der Formel. Wir betrachten das Doppelintegral:

$$U=\int\!\!\int V\,dx\,dy, \tag{1}$$

in welchem V eine gegebene Funktion von x und y bezeichnet, und wollen an Stelle der Variabelen x und y zwei neue Variabele u und v einführen, die mit den ersten durch zwei gegebene Gleichungen verbunden sind:

$$x=f(u,v),$$
$$y=g(u,v).$$

Wie auch das ebene Gebiet begrenzt sein mag, über welches die Integration zu erstrecken ist, das Integral U besteht aus einem oder aus mehreren Gliedern von der Form:

$$Z=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}V\,dy, \tag{2}$$

wobei y_0 und y_1 zwei gegebene Funktionen von x, und x_0 und x_1 zwei Konstanten bedeuten. Auch kann man immer annehmen, daſs y sowohl wie x beständig wachsende Gröſsen sind, oder, was das nämliche besagt, daſs dx und dy positiv sind.

Aus den gegebenen beiden Gleichungen zwischen x, y, u, v kann man den Wert von y als Funktion von x und v bestimmen. Es sei

$$y = g_1(x, v)$$

und es ist das Integral $\int_{y_0}^{y_1} V dy$ zu behandeln, indem x als ein konstanter Parameter zu betrachten ist. Ersetzt man y durch $g_1(x, v)$, dy durch $\frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} dv$, so folgt:

$$\int_{y_0}^{y_1} V dy = \int_{v_0}^{v_1} V \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} dv,$$

und es sind v_0 und v_1 die Werte von v, welche zu $y = y_0$ und $y = y_1$ gehören. Wir nehmen hierbei an, daſs v stets in gleichem Sinne sich ändert, während y von y_0 bis y_1 variiert; andernfalles müſste man das Integral nach y in mehrere Teile zerlegen. Da dy positiv ist, so erhält dv das Zeichen von $\frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v}$; ist diese Ableitung negativ, so kann man dv positiv annehmen, indem man die Grenzen der Integration vertauscht; also ist:

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} dx \int V \left| \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} \right| dv,$$

wobei das Integral nach v entweder zwischen den Grenzen v_0 und v_1, oder v_1 und v_0 zu bilden ist. Bei der Integration nach v bleibt natürlich x konstant und umgekehrt.

Demnach wird der Wert von Z

$$Z = \int\int V \left| \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} \right| dx\, dv = \int dv \int V \left| \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} \right| dx.$$

Auf Grund dieser Gleichung können wir die beabsichtigte Transformation vollenden. Denn ist nun $x = f(u, v)$ der Wert von x als Funktion von u und v, so haben wir dx durch $\left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right| du$ zu ersetzen, und sonach wird

$$Z = \int\int V \left| \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} \right| \left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right| du\, dv.$$

Die Integration erstreckt sich hierbei über das nämliche Gebiet wie in der Gleichung (2). Differentiiert man aber die Gleichung $y = g_1(x, v)$, indem man x und y als Funktionen von u und v betrachtet, so folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) + \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} dv,$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v},$$

und da $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ ist, so wird

$$\frac{\partial g_1(x,v)}{\partial v} \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Also wird der Wert von Z:

$$Z = \int\int \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| V du\, dv.$$

Die Funktion V ist dabei als Funktion von u und v auszudrücken.

593. Geometrische Deutung. Um die geometrische Bedeutung der eben aufgestellten Formel zu erkennen, deuten wir auch u und v als rechtwinklige Koordinaten einer Ebene (u, v). Dann vermittelt die Transformation

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v)$$

eine Abbildung der (u, v)-Ebene auf die (x, y)-Ebene, so daſs innerhalb eines bestimmten Bereiches jedem Punkte $Q(u, v)$ der ersten Ebene ein Punkt $P(x, y)$ der zweiten entspricht. Durchläuft dann der Punkt Q in seiner Ebene eine beliebige *analytische Kurve*, z. B. eine Parallele zu einer Koordinatenaxe $u = \text{const}$ oder $v = \text{const}$, so durchläuft gleichzeitig in der (x, y)-Ebene der Punkt P eine bestimmte analytische Kurve, und dem *geradlinigen* rechtwinkligen Dreieck $Q_0 Q_1 Q_2$ mit den Koordinaten

$$u, v; \quad u + \Delta u,\ v; \quad u,\ v + \Delta v$$

in der (x, y)-Ebene im Allgemeinen ein *krummliniges* Dreieck $P_0 P_1 P_2$ mit den Koordinaten

$$x, y; \quad x + \Delta_1 x, \; y + \Delta_1 y; \quad x + \Delta_2 x, \; y + \Delta_2 y.$$

Läſst man aber Δu und Δv unbegrenzt abnehmen, so werden auch $\Delta_1 x, \Delta_1 y; \Delta_2 x, \Delta_2 y$ gleichzeitig null, d. h. die drei Eckpunkte rücken zusammen, und man kann an der Grenze den Flächeninhalt ΔP des *krummlinigen* Dreieckes $P_0 P_1 P_2$ durch den Inhalt $\Delta' P$ des *geradlinigen* Dreieckes mit denselben Eckpunkten ersetzen, so daſs

$$\lim \frac{\Delta P}{\Delta' P} = 1.$$

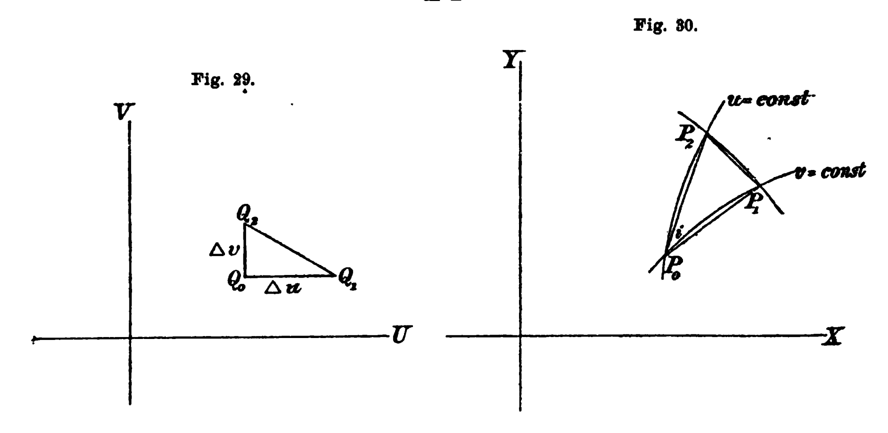


Fig. 29. Fig. 30.

Nun ist aber

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \Delta u \Delta v$$

$$\Delta' P = \frac{1}{2} \left| \Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_2 x \Delta_1 y \right|.$$

Also

$$\lim \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \lim \frac{\Delta' P}{\Delta Q} = \lim \left| \frac{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_2 x \Delta_1 y}{\Delta u \Delta v} \right|$$

$$= \lim \left| \frac{\Delta_1 x}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta_2 y}{\Delta v} - \frac{\Delta_2 x}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta_1 y}{\Delta u} \right|$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| = |D(u, v)|.$$

Der Inhalt des Dreieckes ΔQ in der (u, v)-Ebene wird also bei der betrachteten Transformation um den Faktor D vergröſsert, wenn seine Seiten alle null werden. Da nun aber jede beliebige

Figur in der (u, v)-Ebene durch Parallelen zur u- und zur v-Axe in Rechtecke und weiter durch Diagonalen in Dreiecke wie $Q_0 Q_1 Q_2$ zerlegt werden kann, wobei die entsprechende Figur in der (x, y)-Ebene die entsprechende Einteilung erfährt, so wird auch für jede solche Figur an derselben Stelle der Ebene im Grenzwert dasselbe Vergröfserungsverhältnis D gelten, und wir gewinnen den Satz:

Der Ausdruck $|D| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|$ *ist der Grenzwert des Verhältnisses, um welches eine beliebige Figur* ΔQ *der* u, v-*Ebene, deren sämtliche Dimensionen schliefslich null werden, bei der betrachteten Transformation in die* (x, y)-*Ebene vergröfsert wird.*

Wir denken uns nun das endliche Flächenstück Q in der (u, v)-Ebene in lauter Teilgebiete ΔQ und das entsprechende Flächenstück P der (x, y)-Ebene in die entsprechenden Teilgebiete ΔP zerlegt, während die zugehörigen Werte der stetigen Funktionen $V(x, y) = \overline{V}(u, v)$ und $D(u, v)$ einfach mit V und D bezeichnet werden mögen, und lassen die Dimensionen dieser Teilgebiete unbegrenzt abnehmen, wobei immer

$$Q = \lim S\Delta Q \quad \text{und} \quad P = \lim S\Delta P$$

bleiben mufs. Dann wird wegen

$$\lim \frac{\Delta P}{\Delta Q} - |D| = 0$$

auch

$$\lim S V \Delta Q \left(\frac{\Delta P}{\Delta Q} - |D|\right) = 0,$$

wenn man die Summation über alle Flächenstücke ΔQ oder ΔP ausdehnt.

Also

$$\lim S V \Delta P - \lim S V |D| \Delta Q = 0$$

oder nach der Definition des Doppelintegrales (Nr. 576)

$$\int\int V\, dx\, dy = \int\int V |D|\, du\, dv,$$

wenn das Integral links über das Gebiet P in der (x, y)-Ebene, und das Integral rechts über das entsprechende Gebiet Q in der (u, v)-Ebene erstreckt wird. Wir erhalten also auf

geometrischem Wege dasselbe Ergebnis wie in der vorigen Nummer auf rein analytischem.

Unserer Transformationsformel können wir aber auch noch eine andere Form geben, wenn wir die Bogenlängen s_1, s_2 der beiden Kurven $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$ in der xy-Ebene und den Winkel i einführen, den sie im Punkte $P(x, y)$ mit einander bilden. Es läfst sich nämlich der Inhalt unseres geradlinigen Dreieckes $P_0 P_1 P_2$ anstatt durch die oben angegebene Formel auch durch das halbe Produkt aus zwei Seiten $P_0 P_1 = s_1'$, $P_0 P_2 = s_2'$ und dem Sinus i' des eingeschlossenen Winkels ausdrücken:

$$\Delta' P = \frac{1}{2} s_1' s_2' \sin i'$$

und daher

$$|D| = \lim \frac{\Delta' P}{\Delta Q} = \lim \frac{s_1' s_2'}{\Delta u \Delta v} \sin i' = \frac{ds_1}{du} \frac{ds_2}{dv} \sin i,$$

da an der Grenze die Bogenlängen s_1 und s_2 unserer Kurven durch ihre Sehnen s_1' und s_2' und der von ihnen eingeschlossene Winkel i durch i' ersetzt werden kann. Wir erhalten also

$$\int\!\!\int V dx\, dy = \int\!\!\int V |D|\, du\, dv = \int\!\!\int V \frac{ds_1}{du} \frac{ds_2}{dv} \sin i\, du\, dv.$$

Diese Formel kann in vielen Fällen dazu dienen, die zur Umformung des Integrales vermittels der Determinante D erforderlichen Rechnungen durch geometrische Betrachtungen zu erleichtern.

594. Anwendung zur Berechnung der Oberfläche. Die Oberfläche in Gaufs'schen Koordinaten. Die in Nr. 592 gegebene Formel, welche die Transformation eines Doppelintegrals angiebt, wollen wir nun benützen, um der früher berechneten Formel für den Flächeninhalt einer krummen Fläche eine symmetrische Gestalt zu verleihen.

Wir hatten (Nr. 584)

$$F = \int dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \tag{1}$$

Nun führen wir an Stelle von x und y zwei neue unabhängige Variable u und v ein, also krummlinige Koordinaten in der xy-Ebene, so dafs x und y und vermöge der Flächengleichung $z = f(x, y)$ auch z sich in Funktionen von u und v verwandeln.

Wir bekommen dann

$$F = \int\int du\, dv\, |D_z| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

wo D_z gesetzt ist für die Determinante

$$D_z = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Die entsprechenden beiden anderen Determinanten, welche aus D_z durch cyklische Vertauschung von x, y und z entstehen, bezeichnen wir später mit D_x und D_y.

Nun müssen wir die Gröfsen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ ersetzen durch Ausdrücke, welche nur Differentialquotienten nach u und v enthalten.

Dazu dienen die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

deren Auflösungen so lauten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{D_x}{D_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{D_y}{D_z}.$$

Dadurch erhalten wir

$$F = \int\int du\, dv \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}. \tag{2}$$

Diese Formel können wir noch anders schreiben. Nach einem bekannten Determinantensatz ist nämlich

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$
$$= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right)$$
$$- \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Wir führen nun die Abkürzungen ein

$$\begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{cases} \tag{3}$$

und haben dann

$$(4) \qquad F = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Die so gewonnene symmetrische Formel läſst nun eine unmittelbar anschauliche Deutung zu, die wir erkennen werden, wenn wir die neuen Variabeln u und v mit Gauſs nicht als krummlinige Koordinaten in der xy-Ebene sondern als Koordinaten auf der Fläche selbst deuten.

Diese Auffassung ergiebt sich daraus, daſs durch Angabe der Werte von u und v die drei Koordinaten eines Punktes auf der Fläche vollkommen bestimmt sind.

$u = u_0$ stellt dann eine Kurve auf der Fläche dar, während nach der früheren Auffassung $u = u_0$ eine Kurve der xy-Ebene war, nämlich die Projektion der jetzt betrachteten Raumkurve. $u =$ const, $v =$ const sind also zwei Kurvenscharen auf der Fläche, welche, wie in der Ebene die Parallelen zur x- und y-Axe, die ganze Fläche erfüllen.

Wir wollen nun die Richtungscosinus der Tangenten dieser Kurven (Nr. 252) im Punkte u, v berechnen.

Für die Kurve $v =$ const ist u die unabhängige Variable. Daher sind ihre Richtungscosinus

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}}.$$

Ebenso bekommen wir für die Kurve $u =$ const die Richtungscosinus

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Der Cosinus des Winkels i, welchen die beiden Kurven $u =$ const und $v =$ const im Punkte u, v einschlieſsen, ist

$$\cos i = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} = \frac{F}{\sqrt{E\cdot G}}$$

und daher der Sinus:

$$(5) \qquad \sin i = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Mit Hülfe der Relation

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG}\sin i$$

können wir nun das für den Flächeninhalt gewonnene Integral (4) so schreiben:

$$F = \int\int du\, dv \sqrt{EG}\sin i, \tag{6}$$

oder

$$F = \int\int du\sqrt{E}\cdot dv\sqrt{G}\sin i.$$

Hierin haben noch die Ausdrücke

$$du\sqrt{E} \quad \text{und} \quad dv\sqrt{G}$$

eine einfache Bedeutung.

Es ist nämlich wegen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{7}$$

Daher ist das Linienelement auf der Kurve $v = \text{const}$ gegeben durch

$$ds_1 = du\sqrt{E},$$

und das auf der Kurve $u = \text{const}$ durch

$$ds_2 = dv\sqrt{G},$$

so daſs $\sqrt{EG} = \frac{ds_1}{du}\cdot\frac{ds_2}{dv}$ wird, und die Formel für den Flächeninhalt die einfache Gestalt erhält

$$F = \int\int \frac{ds_1}{du}\cdot\frac{ds_2}{dv}\sin i\, du\, dv = \int\int ds_1\, ds_2 \sin i. \tag{8}$$

Dieser Formel können wir die geometrische Bedeutung unmittelbar ansehen.

Es ist nämlich $ds_1\, ds_2 \sin i$ der Flächeninhalt des von den vier Kurven $u = u_0$, $v = v_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0 + dv$ be-

grenzten unendlich kleinen Parallelogramms, so daſs diese Formel direkt dem Ausdruck

$$F = \int\int dx\,dy$$

für den Flächeninhalt eines Ebenenstückes entspricht.

595. Die Oberfläche in Polarkoordinaten. Die in der vorigen Nummer gegebene Formel (4) für die Oberfläche wollen wir auf den Fall anwenden, wo unsere Fläche durch eine Gleichung

$$r = f(\vartheta, \psi) \tag{1}$$

zwischen den in Nr. 251 eingeführten Polarkoordinaten r, ϑ, ψ gegeben ist.

Setzen wir nämlich nach Nr. 251

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\psi, \\ y = r \sin\vartheta \sin\psi, \\ z = r \cos\vartheta, \end{cases} \tag{2}$$

so wird das Quadrat der Länge des Linienelementes, so lange noch r, ϑ, ψ als von einander unabhängig angenommen werden, gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\psi^2. \tag{3}$$

Auf unserer Fläche aber ist nach (1)

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial r}{\partial \psi} d\psi.$$

Also wird jetzt

$$ds^2 = \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2\right] d\vartheta^2 + 2\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\frac{\partial r}{\partial \psi} d\vartheta\, d\psi + \left[r^2 \sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right] d\psi^2.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Formel (7) der vorigen Nummer, so ergiebt sich

$$E = r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2, \quad F = \frac{\partial r}{\partial \vartheta}\frac{\partial r}{\partial \psi}, \quad G = r^2 \sin^2\vartheta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2, \tag{4}$$

also

$$EG - F^2 = r^2 \sin^2\vartheta \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2\right] + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2.$$

Somit nimmt die Formel (4) der vorigen Nummer für die Oberfläche die Gestalt an:

$$(5) \qquad F = \iint \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2 \vartheta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}\, r\, d\vartheta\, d\psi,$$

wenn die Grenzen der Integration je nach der Wahl des betrachteten Flächenstückes richtig bestimmt werden.

Ist insbesondere unsere Fläche (1) eine *Kugel* $r = \text{const}$, so wird $\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = 0$, $\frac{\partial r}{\partial \psi} = 0$ und daher der Flächeninhalt einer sphärischen Figur:

$$(6) \qquad F = \iint r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi = r^2 \iint \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi.$$

Diesen letzten Ausdruck gewinnt man auch unmittelbar aus der Formel (8) der vorigen Nummer. In unserem Falle sind nämlich die beiden Kurvenscharen, die Meridiane $\psi = \text{const}$ und die Parallelkreise $\vartheta = \text{const}$, zu einander orthogonal, also $\sin i = 1$. Ferner ist auf jedem Meridian $\frac{d s_1}{d\vartheta} = r$ und auf dem zu ϑ gehörigen Parallelkreise $\frac{d s_2}{d\psi} = r \sin\vartheta$, nämlich gleich dem Radius dieses Kreises. Es wird also

$$\frac{d s_1}{d\vartheta} \frac{d s_2}{d\psi} \sin i = r^2 \sin\vartheta,$$

und daher der sphärische Flächeninhalt wie oben

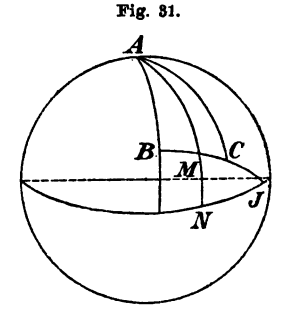
$$F = \iint r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi.$$

596. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes. Wir wollen die Formel

$$dF = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

für das Flächenelement einer Kugel vom Radius 1 anwenden, um den Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes zu bestimmen.

Fig. 31.



ABC seien die Ecken des Dreieckes und diese Buchstaben mögen zugleich auch die zugehörigen Winkel bezeichnen.

Wir wählen nun folgendes Polarkoordinatensystem.

A sei der Pol ($\theta = 0$), ferner gehe durch AB die Ebene $\psi = 0$.

Der Flächeninhalt ist nun gegeben durch

$$F = \int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \int_0^A d\psi \int_0^{AM} \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Hier ist M derjenige Punkt, in welchem die durch den Winkel ψ gegebene Meridianebene die dem Punkte A gegenüberliegende Seite des sphärischen Dreieckes schneidet.

Wir bekommen also

$$F = \int_0^A d\psi\,(1 - \cos AM),$$

oder da $\cos AM = \sin MN$:

$$F = \int_0^A d\psi - \int_0^A \sin MN\, d\psi.$$

Nun benutzen wir verschiedene Relationen der sphärischen Trigonometrie, die in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck bestehen, dessen Ecken M, N und J, der Schnittpunkt der Seite BC mit dem Äquator, sind. Es ist

$$\cos M = \sin J \cos NJ.$$

Hieraus folgt

$$dM \sin M = -\, d\psi \sin NJ \sin J,$$

und weil $\sin MN = \frac{\sin NJ \cdot \sin J}{\sin M}$ ist,

$$\sin MN\, d\psi = -\, dM,$$

folglich wird:

$$F = A + \int_0^A \frac{dM}{d\psi}\, d\psi.$$

Da nun $M = \pi - B$ ist für $\psi = 0$, und $M = C$ für $\psi = A$, so wird

$$F = A + B + C - \pi,$$

und dies ist der bekannte Ausdruck.

Diese Formel hätten wir auch direkt erhalten können, indem wir in dem sphärischen Dreieck ABC von A das Lot auf BC fällten und für die beiden so erhaltenen rechtwinkligen sphärischen Dreiecke den in Nr. 590 abgeleiteten Satz anwendeten.

597. Oberfläche des Ellipsoides. Die Gleichung des Ellipsoides in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

führt zur Berechnung der Oberfläche auf das Doppelintegral

$$F=\iint\frac{\sqrt{1+\frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2-b^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy.$$

Die Integration sowohl nach x wie nach y hängt von elliptischen Integralen ab. Die Anwendung von Polarkoordinaten würde auf dieselbe Schwierigkeit führen. Dagegen läfst sich eine Reduktion des Integrales erzielen, wenn man als Variabele die Winkel θ, ψ einführt, so dafs

$$x=a\sin\theta\cos\psi,\qquad y=b\sin\theta\sin\psi,\qquad z=c\cos\theta$$

wird, wodurch in der That die Gleichung (1) des Ellipsoides erfüllt wird. Gemäfs der Formel (4) in Nr. 594 findet man:

$$F=\iint\sqrt{a^2b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta\,(a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi)}\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Die Integrationen sind von $\theta=0$ bis $\theta=\pi$, und von $\psi=0$ bis $\psi=2\pi$ zu bilden. Die Integration nach θ läfst sich nun in geschlossener Form ausführen, und der Ausdruck F wird so auf ein einfaches elliptisches Integral reduziert. Indessen werden durch diese erste Integration cyklometrische Funktionen eingeführt, und das Resultat, welches man auf diesem Wege erhält, hat noch nicht die einfache Form, welche man dem Ausdruck geben kann. Wir wollen daher diese Rechnung nicht ausführen, sondern eine andere Methode zur Lösung der Aufgabe einschlagen. Dieselbe ist besonders bemerkenswert und läfst sich auch mit Erfolg für eine ausgedehnte Gruppe von anderen Problemen verwenden.

Wir bezeichnen mit u den Kosinus des Winkels, den die Tangentenebene der Fläche im Punkte (x, y, z) mit der xy-Ebene bildet, so ist:

$$u = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}{\frac{z}{c^2}},$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}-\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\frac{z^2}{c^4}=0. \tag{2}$$

Betrachtet man u als konstant, so stellt diese Gleichung einen Kegel zweiter Ordnung dar, und die Gleichungen (1) und (2) bestimmen zusammen eine Kurve, den Ort der Punkte auf dem Ellipsoide, für welche die Tangentenebene mit der xy-Ebene denselben Winkel, dessen Kosinus u ist, bildet. Man erhält die normale Projektion dieser Kurve auf die xy-Ebene, wenn man z aus den beiden Gleichungen eliminiert, und findet so:

$$\frac{a^2-(a^2-c^2)u^2}{a^4(1-u^2)}x^2+\frac{b^2-(b^2-c^2)u^2}{b^4(1-u^2)}y^2=1. \tag{3}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Halbaxen die Werte haben:

$$\frac{a^2\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{a^2-(a^2-c^2)u^2}}, \qquad \frac{b^2\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{b^2-(b^2-c^2)u^2}},$$

und deren Fläche demnach gleich ist:

$$E=\frac{\pi a^2 b^2(1-u^2)}{\sqrt{a^2-(a^2-c^2)u^2}\sqrt{b^2-(b^2-c^2)u^2}}. \tag{4}$$

Es sei nun dE das Differential von E, wenn u um du wächst; der Teil der Oberfläche, welcher auf irgend einer der beiden Seiten der xy-Ebene liegt und sich in die ringförmige Fläche dE projiziert, hat den Wert $\frac{dE}{u}$; um also die ganze Fläche F des Ellipsoides zu erhalten, hat man den Ausdruck $\frac{dE}{u}$ oder $\frac{dE}{du}\cdot\frac{du}{u}$ von $u=1$ bis $u=0$ zu integrieren und den erhaltenen Wert zu verdoppeln. So wird, indem man die Grenzen vertauscht und das Vorzeichen des Integrales ändert:

$$F=-2\int_0^1\frac{dE}{du}\cdot\frac{du}{u}. \tag{5}$$

In diese Gleichung hat man also den Wert von $\frac{dE}{du}$, welcher aus der Gleichung (4) folgt, zu substituieren, und somit ist die Fläche des Ellipsoides durch ein einfaches Integral ausgedrückt. Indessen ist es zweckmäſsig, diesen Ausdruck vorher noch zu transformieren. Wir nehmen $a > b > c$ an, die Ungleichung soll jedoch nicht die Gleichheit ausschlieſsen, und setzen zur Abkürzung:

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = k^2, \qquad c = a\cos\mu,$$

also:

$$\sqrt{a^2-c^2} = a\sin\mu, \qquad c = b\sqrt{1-k^2\sin^2\mu};$$

μ ist ein Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. An Stelle von u führen wir als Variabele den Winkel φ ein, der durch die Gleichung bestimmt ist:

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\mu},$$

und wenn u zwischen den Grenzen 0 und 1 variiert, so variiert φ von 0 bis μ. Also werden die Gleichungen (4) und (5):

$$E = \frac{\pi ab\left(1 - \frac{a^2}{a^2-c^2}\sin^2\varphi\right)}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{6}$$

$$F = \frac{-2\sqrt{a^2-c^2}}{a}\int_0^\mu \frac{dE}{d\varphi}\frac{1}{\sin\varphi}\,d\varphi. \tag{7}$$

Vermittelst der Gleichung (6) findet man:

$$\frac{dE}{\sin\varphi} = d\frac{E}{\sin\varphi} + \frac{E\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi = d\frac{E}{\sin\varphi} + \pi ab\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$- \pi ab\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

andererseits erhält man durch Differentiation des Ausdruckes

$$\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}:$$

$$d\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = -\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$- \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

und wenn man aus dieser Gleichung den Wert von:

$$\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

berechnet, um ihn in die vorhergehende Formel zu substituieren, so folgt, wenn man noch den Wert von E berücksichtigt:

$$\frac{-2\sqrt{a^2-c^2}}{a}\frac{dE}{d\varphi}\frac{1}{\sin\varphi}d\varphi$$

$$=2\pi c^2 d\left\{\frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}}{\operatorname{tang}\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\left[1+\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^4}(\sin^2\varphi-\sin^2\mu)\right]\right\}$$

$$+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi+c^2\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Integriert man zwischen den Grenzen $\varphi=0$ und $\varphi=\mu$, so erhält man:

$$(8)\quad F=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi+c^2\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Wird also gemäfs der Legendre'schen Bezeichnung:

$$(9)\quad \int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\mu,k),\qquad \int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=E(\mu,k)$$

gesetzt, so folgt die Formel von Legendre:

$$(10)\quad F=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)E(\mu,k)+c^2F(\mu,k)].$$

Will man das elliptische Integral zweiter Gattung einführen:

$$\int_0^\mu\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

so wird auf Grund der Identität:

$$\int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-k^2\int_0^\mu\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$(11)\quad F=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{b^2-c^2}{b^2}\int_0^\mu\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Ist $c = b$, so hat man das verlängerte Rotationsellipsoid; es ist $k = 0$, $\mu = \arccos \frac{b}{a}$; und diese Formel ergiebt (Nr. 589):

$$(12) \qquad F = 2\pi b^2 + 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}.$$

Ist $a = b$, so hat man das abgeplattete Rotationsellipsoid; es ist $k = 1$ und die Formel (8) giebt (Nr. 589):

$$(13) \qquad F = 2\pi b^2 + \frac{\pi b c^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}\, l \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{b - \sqrt{b^2 - c^2}}.$$

§ 6. Dreifache und n-fache Integrale.

598. Das Volumen als dreifaches Integral. Die Formel, durch welche wir das Volumen eines von einer stetigen Fläche begrenzten Körpers in Nr. 575 bestimmt haben, war unter Annahme rechtwinkliger Koordinaten:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dy;$$

da $z_1 - z_0$ das Integral des Differentiales dz zwischen den Grenzen z_0 und z_1 ist, so kann man auch schreiben:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz,$$

oder einfach:

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz,$$

wenn die Grenzen der Integration nicht besonders zum Ausdruck gebracht werden. Dieser Wert für V ist ein *räumliches* oder auch *dreifaches Integral* und ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck:

$$V = \lim S \Delta x \Delta y \Delta z,$$

welcher aussagt, dafs das Volumen V die Grenze ist, nach welcher die Summe der im Innern des Körpers enthaltenen rechtwinkligen Parallelepipede $\Delta x \Delta y \Delta z$ konvergiert, wenn man ihre Dimensionen nach Null abnehmen läfst.

Will man an Stelle rechtwinkliger Koordinaten schiefe anwenden, und sind a, b, c die Winkel zwischen den Axen

Oy und Oz, Oz und Ox, Ox und Oy, so bekommt das schiefe Parallelepiped, dessen Kanten Δx, Δy, Δz sind, das Volumen $k\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, wobei

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c},$$

und an Stelle der obigen Formeln erhält man:

$$V = k \lim S\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = k\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz.$$

599. Das Volumen in krummlinigen Koordinaten. Wir betrachten nun allgemein ein System von drei Flächenscharen mit den Gleichungen:

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad w = \text{const},$$

wo u, v, w gegebene Funktionen der drei rechtwinkligen Koordinaten bedeuten.

Nimmt man aus jedem Systeme zwei bestimmte Flächen heraus, welche zu den Parametern u und $u + \Delta u$, v und $v + \Delta v$, w und $w + \Delta w$ gehören, so erhält man einen Körper ΔV, den man ein krummliniges *Parallelepiped* nennen kann, denn zwei Tangentenebenen an derselben Seite oder an zwei gegenüberliegenden Seiten bilden einen Winkel, der mit den Gröſsen Δu, Δv, Δw gleichzeitig verschwindet.

Wir bezeichnen nun mit s_1, s_2, s_3 die krummlinigen Kanten, welche durch den Punkt gehen, in welchem sich die Flächen u, v, w schneiden, der Bogen s_1 soll dabei auf der Schnittkurve der Flächen v und w, der Bogen s_2 auf der Schnittkurve von w und u, der Bogen s_3 auf der Schnittkurve von u und v gemessen werden. Endlich seien a, b, c die Winkel, welche von je zwei Tangenten dieser Kurven gebildet werden und im Allgemeinen stetige Funktionen von u, v, w darstellen. Da nun an der Grenze das krummlinige Parallelepiped ΔP durch das geradlinige mit denselben Winkeln und den Kanten Δs_1, Δs_2, Δs_3 ersetzt werden kann, so wird nach der vorigen Nummer

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta u\,\Delta v\,\Delta w} = \lim k\,\frac{\Delta s_1}{\Delta u}\,\frac{\Delta s_2}{\Delta v}\,\frac{\Delta s_3}{\Delta w} = k\,\frac{ds_1}{du}\,\frac{ds_2}{dv}\,\frac{ds_3}{dw},$$

wenn k dieselbe Bedeutung wie dort hat.

Es sei nun V das Volumen eines von einer stetigen Fläche begrenzten Körpers. Man erkennt, dafs dasselbe gleich wird der Grenze, nach welcher die Summe aller krummlinigen Parallelepipede konvergiert, welche in dem gegebenen Körper enthalten sind und durch die drei Flächensysteme ausgeschnitten werden. Also wird:

$$V = S\Delta V = \lim Sk \frac{ds_1}{du}\frac{ds_2}{dv}\frac{ds_3}{dw}\Delta u \Delta v \Delta w$$
$$= \int\int\int k \frac{ds_1}{du}\frac{ds_2}{dv}\frac{ds_3}{dw} du\, dv\, dw.$$

Die Grenzen der Integrationen lassen sich ohne Schwierigkeit bestimmen, wie in den früher behandelten Fällen, wenn die Oberfläche des Körpers durch die Schnittkurven der Flächensysteme immer nur in zwei Punkten getroffen wird. Andernfalls mufs man den Körper in mehrere Teile zerlegen, die getrennt zu berechnen sind.

Die vorige Formel vereinfacht sich, sobald die drei Flächensysteme orthogonal sind; denn alsdann wird die Gröfse k, welche im allgemeinen eine Funktion der Variabelen u, v, w ist, gleich eins.

600. Anwendung auf Polarkoordinaten. Legen wir unserer Rechnung wie in Nr. 595 die Polarkoordinaten r, ϑ, ψ zu Grunde, so werden die Punkte des Raumes durch folgende drei zu einander orthogonale Flächensysteme bestimmt: durch die konzentrischen Kugeln $r = \text{const}$ mit dem Anfangspunkt O als Mittelpunkt, durch die coaxialen Rotationskegel $\vartheta = \text{const}$ mit O als Spitze und endlich durch die Meridianebenen $\psi = \text{const}$, die zu derselben Axe gehören. Die drei Kurvensysteme aber, in denen je zwei dieser Flächensysteme einander schneiden, sind: 1) die Radienvektoren $\vartheta = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, auf denen beständig $\frac{ds_1}{dr} = 1$ ist, 2) die Meridiankreise $r = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, auf denen immer $\frac{ds_2}{d\vartheta} = r$ ist und 3) die Parallelkreise $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, auf denen $\frac{ds_3}{d\psi} = r \sin\vartheta$ nämlich gleich ihrem Radius ist. Da ferner wegen der Orthogonalität der Flächensysteme beständig $k = 1$ ist, so erhalten wir nach

der allgemeinen Formel der vorigen Nummer für das Volumen eines beliebigen Körpers die Gleichung

$$V = \int\int\int r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\psi$$

bei richtiger Bestimmung der Grenzen.

Zu dieser Formel hätten wir auch gelangen können, wenn wir den in Nr. 595 abgeleiteten Ausdruck für den Flächeninhalt einer sphärischen Figur

$$F = \int\int r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi$$

auf den Durchschnitt unseres Körpers mit einer beliebigen Kugel $r = \text{const}$ angewendet und ihn dann nach r integriert hätten, was einer Zerlegung des Körpers in konzentrische sphärische Schichten entspräche.

Nehmen wir an, dafs der Anfangspunkt aufserhalb des Körpers liegt, und bezeichnen wir mit r_0 und r_1 die Werte von r beim Eintritt in den Körper und beim Austritt — dieselben sind Funktionen von θ und ψ —, so mufs die Integration nach r zwischen den Grenzen r_0 und r_1 ausgeführt werden; also wird:

$$V = \frac{1}{3}\int\int (r_1^3 - r_0^3) \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Die Integration nach θ mufs dann zwischen den Grenzen θ_0 und θ_1 gebildet werden, welche zu den Grenzen des Körpers gehören und Funktionen von ψ sind, und endlich ist die Integration nach ψ zwischen den Werten ψ_0 und ψ_1 zu nehmen, die den beiden durch die z-Axe gehenden Ebenen zugehören, welche den Körper begrenzen. Also ist zu schreiben:

$$V = \frac{1}{3}\int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_{\theta_0}^{\theta} (r_1^3 - r_0^3) \sin\theta \, d\theta;$$

liegt der Anfangspunkt im Innern des Körpers, so beginnt das Integral nach r mit dem Werte 0, und die Integrale nach θ und ψ müssen bezüglich von 0 bis π und von 0 bis 2π gebildet werden. Also ist:

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} r_1^3 \sin\theta \, d\theta.$$

601. Das n-fache Integral. Hatten wir uns anfangs nur mit einfachen Integralen beschäftigt, so führten uns später die Probleme der Kubatur und Quadratur krummer Flächen auf die Betrachtung von zweifachen oder Doppelintegralen, und schliefslich erhielten wir (in Nr. 598) eine Darstellung des Volumens durch ein dreifaches Integral. Auf diesem Wege fortschreitend gelangen wir zuletzt zu dem Begriffe des n-fachen Integrales.

Ist nämlich eine stetige Funktion $V(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von n unabhängigen Variabelen gegeben, so können wir successive nach den n Variabelen integrieren, wobei wir jedesmal die Grenzen der vollzogenen Integration ξ_μ, ξ_μ' als Funktionen der noch übrigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{\mu-1}$ betrachten. Der so gewonnene Ausdruck U heifst „das n-fache Integral der Funktion V nach den Variabelen $x_1, \ldots x_n$" und wird geschrieben in der Form:

$$U = \int_{\xi_1'}^{\xi_1} dx_1 \int_{\xi_2'}^{\xi_2} dx_2 \cdots \int_{\xi_n'}^{\xi_n} V\, dx_n$$

oder abgekürzt einfach:

$$U = \int V\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Hier sind die Grenzen der Integration gegeben durch ein System von Ungleichheiten

$$\xi_\mu'(x_1, \cdots x_{\mu-1}) < x_\mu < \xi_\mu(x_1, \cdots x_{\mu-1}),$$

die aber auch durch eine Anzahl von Ungleichheiten der allgemeineren Form

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots x_n) < 0$$

ersetzt werden können.

Ebenso wie das einfache und zweifache Integral läfst sich nun auch das n-fache darstellen als Grenzwert einer Summe

$$U = \lim S\, V \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$$

und zwar in folgendem Sinne. Man soll den n-dimensionalen Bereich aller Wertesysteme $(x_1, x_2, \cdots x_n)$, die den vorgelegten Ungleichheiten $\Phi < 0$ genügen, in eine Anzahl von Teilgebieten ΔP zerlegen, in deren jedem die Variabele x_μ immer nur in einem Intervall von der Gröfse Δx_μ variieren darf,

soll jedes dieser Produkte $\Delta P = \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ mit einem der Werte V multiplizieren, den unsere Funktion $V(x_1, \cdots x_n)$ im Innern oder an der Grenze von ΔP annimmt, soll die Summe aller dieser Ausdrücke bilden und dann zur Grenze übergehen, indem man sämtliche Teilintervalle $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n$ gleichzeitig null werden läſst. Analog wie in Nr. 576—577 für das Doppelintegral läſst sich dann zeigen, daſs die betrachtete Summe einen bestimmten Grenzwert besitzt, wenn sowohl die Funktion V als auch die Funktionen Φ, welche die Begrenzung bestimmen, stetige Funktionen sind, und daſs dieser selbe Grenzwert auch erhalten wird, wenn man die Funktion V unter Berücksichtigung der Grenzen in beliebiger Reihenfolge successive nach den n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$ integriert. Es folgt also, daſs die beiden Definitionen des n-fachen Integrales identisch sind, sowie daſs die Reihenfolge der successiven Integration ohne Einfluſs auf das Resultat ist.

602. Transformation der Variabelen in n-fachen Integralen. Hat man ein vielfaches Integral von der Ordnung n

$$U = \int V dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

und man substituiert an Stelle der n Variabelen $x_1, x_2, \cdots x_n$ andere n Variabele: $u_1, u_2, \cdots u_n$, welche mit den ersten durch gegebene Gleichungen verbunden sind, so erhält man:

$$\int V dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int |D| \, V du_1 du_2 \cdots du_n,$$

wobei D die Determinante bezeichnet:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

Dieser Satz ist in Nr. 592 für den Fall zweier Variabelen x und y bewiesen; es genügt also, ihn für $n + 1$ Variabele

nachzuweisen, indem man seine Giltigkeit für n Variabele voraussetzt.

Es sei also das Integral von der Ordnung $n+1$ gegeben:

$$U = \int^{(n+1)} V\, dx_0\, dx_1 \cdots dx_n,$$

und es sollen an Stelle der Variabelen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ die $n+1$ Variabelen $u_0, u_1, u_2, \cdots u_n$ eingeführt werden. Man kann nun damit beginnen, die n Variabelen $x_1, x_2, \cdots x_n$ als Funktionen von x_0 und den n neuen Variabelen $u_1, u_2, \cdots u_n$ darzustellen. Die Integration nach x_0 mufs dann zuletzt ausgeführt werden. Durch diese Transformation von n Variabelen erhalten wir unserer Annahme nach

$$U = \int^{(n+1)} |\Delta|\, V\, dx_0\, du_1\, du_2 \cdots du_n;$$

Δ bezeichnet die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta u_1} & \frac{\delta x_1}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta x_1}{\delta u_n} \\ \frac{\delta x_2}{\delta u_1} & \frac{\delta x_2}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta x_2}{\delta u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\delta x_n}{\delta u_1} & \frac{\delta x_n}{\delta u_2} & \cdots & \frac{\delta x_n}{\delta u_n} \end{vmatrix}.$$

Wir gebrauchen hier das Zeichen δ, um die partiellen Ableitungen auszudrücken, die unter der Annahme gebildet sind, dafs die unabhängigen Variabelen x_0 und $u_1, u_2, \cdots u_n$ sind, während wir das Zeichen ∂ für den Fall beibehalten, dafs $u_0, u_1, u_2, \cdots u_n$ die unabhängigen Variabelen sind. Differentiiert man eine der Variabelen $x_1, x_2, \cdots x_n$ bei dieser letzteren Annahme zuerst nach einer der Variabelen $u_1, u_2, \cdots, u_n$, sodann nach u_0, so wird

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu} = \frac{\delta x_\lambda}{\delta u_\mu} + \frac{\delta x_\lambda}{\delta x_0}\frac{\partial x_0}{\partial u_\mu}, \qquad \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_0} = \frac{\delta x_\lambda}{\delta x_0}\frac{\partial x_0}{\partial u_0},$$

also

$$\frac{\delta x_\lambda}{\delta u_\mu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu} - \frac{\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} \frac{\partial x_0}{\partial u_\mu},$$

und ähnliche Ausdrücke gewinnt man für jede Ableitung in der Determinante Δ.

Bei der Ermittelung von U kann nunmehr aber nach dieser Substitution die Integration in Bezug auf x_0 zuerst vollzogen werden, wenn man x_0 als Funktion von u_0 und von $u_1, u_2, \cdots u_n$ ausdrückt und dx_0 durch $\frac{\partial x_0}{\partial u_0} du_0$ ersetzt. Man erhält so:

$$U = \int^{(n+1)} \left| \Delta \frac{\partial x_0}{\partial u_0} \right| V du_0 du_1 du_2 \cdots du_n,$$

und der Ausdruck von Δ läfst sich aus dem folgenden ableiten:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial n_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

indem man hier $\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu}$ immer durch $\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu} - \frac{\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} \frac{\partial x_0}{\partial u_\mu}$ ersetzt.

Wir bezeichnen mit D_λ die Werte, welche man erhält, indem man in der μten Zeile von D_0 überall ∂x_λ durch ∂x_0 ersetzt.

Wir ersetzen nun zuerst in D_0 die Ableitungen von x_1, nämlich $\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \cdots \frac{\partial x_1}{\partial u_n}$ durch die Werte

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_\mu} - \frac{\frac{\partial x_1}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} \frac{\partial x_0}{\partial u_\mu}$$

und erhalten das Resultat:

$$D_0 - \frac{\frac{\partial x_1}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} D_1.$$

Ersetzt man in diesem Ausdrucke weiter die Ableitungen von x_2, nämlich $\frac{\partial x_2}{\partial u_\mu}$ durch die Werte $\frac{\partial x_2}{\partial u_\mu} - \frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} \frac{\partial x_0}{\partial u_\mu} \cdots$, so ändert sich D_1 nicht, denn diese Determinante wird null, wenn x_0 an Stelle von x_2 tritt. Man erhält also:

$$D_0 - \frac{\frac{\partial x_1}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} D_1 - \frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} D_2$$

und erkennt nun leicht, daſs, wenn man die übrigen Ableitungen sämtlich ebenso ersetzt bis einschlieſslich derer von x_n, der Ausdruck von D_0 schlieſslich gleich wird:

$$\Delta = D_0 - \frac{\frac{\partial x_1}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} D_1 - \frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} D_2 - \cdots - \frac{\frac{\partial x_n}{\partial u_0}}{\frac{\partial x_0}{\partial u_0}} D_n,$$

so daſs also

$$\Delta \frac{\partial x_0}{\partial u_0} = D_0 \frac{\partial x_0}{\partial u_0} - D_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_0} - D_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_0} - \cdots - D_n \frac{\partial x_n}{\partial u_0}.$$

Nun kann man in jeder Determinante D_λ bei sonst ungeänderter Reihenfolge die λ^{te} Zeile mit $\frac{\partial x_0}{\partial u_1}, \frac{\partial x_0}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial x_0}{\partial u_n}$ zur ersten machen, wobei D_λ in D_λ' übergeht und das Vorzeichen sich um den Faktor $(-1)^{\lambda-1}$ ändert, und erhält so

$$\Delta \frac{\partial x_0}{\partial u_0} = D_0 \frac{\partial x_0}{\partial u_0} - D_1' \frac{\partial x_1}{\partial u_0} + D_2' \frac{\partial x_2}{\partial u_0} - + \cdots + (-1)^n D_n' \frac{\partial x_n}{\partial u_0}.$$

Diese rechte Seite ist aber nichts anderes als die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial u_0} & \frac{\partial x_0}{\partial u_1} & \frac{\partial x_0}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_0}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_0} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_0} & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

denn D_λ' entsteht aus D durch Fortlassung der ersten Kolonne und der $\lambda+1^{\text{ten}}$ Zeile mit $\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_1}, \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_2} \cdots, \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_n}$, ist also bis auf den Faktor $(-1)^\lambda$ die Unterdeterminante von $\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_0}$. Also ist $\Delta \frac{\partial x_0}{\partial u_0} = D$ und folglich, wie behauptet,

$$U = \int^{(n+1)} |D|\, V du_0\, du_1\, du_2 \cdots du_n.$$

603. Anwendung auf die Berechnung des Volumens in Polarkoordinaten. Der Ausdruck des Volumens ist in rechtwinkligen Koordinaten:

$$U = \int\int\int dx\, dy\, dz,$$

und wenn man für x, y, z drei neue Variabele substituiert, so folgt:

$$U = \int\int\int |D|\, du\, dv\, dw,$$

wobei

$$D = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial w} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

ist. Wählt man für u, v, w die Polarkoordinaten r, θ, ψ, welche mit x, y, z durch die Gleichungen verbunden sind:

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

so wird:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\psi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\psi, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -r\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = r\sin\theta\cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0,$$

und dies giebt:

$$\Delta = r^2 \sin\theta,$$

also wird, wie bereits in Nr. 600 gefunden wurde, in Polarkoordinaten

$$U = \int\int\int r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

604. Formel von Dirichlet zur Berechnung gewisser n-facher bestimmter Integrale. Wir wollen hier noch ein wichtiges Beispiel für die Reduktion eines vielfachen Integrales geben. Dieses Integral ist folgendes:

$$(1)\quad V_n^{(p)} = \int\int\cdots\int x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)^{p-1}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

Die Exponenten $p, p_1, p_2, \cdots p_n$ sind positiv, und das Integral soll über alle positiven Werte der n Variabelen $x_1, x_2, \cdots x_n$ erstreckt werden, welche der Ungleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$$

genügen. Wir beginnen mit der Integration des Differentiales $x_n^{p_n-1}(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{p-1}dx_n$ nach x_n, in welchem $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ als Konstanten anzusehen sind. Die Grenzen dieser Integration sind 0 und $1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$; wir setzen

$$x_n = (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})\,t,$$

wobei t eine neue Variabele ist. Die Grenzen der Integration nach t werden 0 und 1, und man erhält

$$(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{p+p_n-1}\int_0^1 t^{p_n-1}(1-t)^{p-1}\,dt.$$

Dies Integral nach t ist nichts anderes als das Eulersche Integral erster Gattung $B(p_n, p)$; folglich reduziert sich die Gleichung (1) auf

$$(2)\quad \begin{cases} V_n^{(p)} = B(p_n, p) \\ \times\int\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}(1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})^{p+p_n-1}\,dx_1\cdots dx_{n-1}. \end{cases}$$

Die Integration muſs jetzt auf die positiven Werte der $n-1$ Variabelen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ erstreckt werden, welche der Ungleichung genügen:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} < 1.$$

Demnach läſst sich die Gleichung (2) in der Form darstellen:

$$(3)\qquad V_n^{(p)} = B(p_n, p)\,V_{n-1}^{(p+p_n)}.$$

Ist $n = 1$, so reduziert sich die Gleichung (1) auf das einfache Integral $\int\limits_0^1 x_1^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx$ und ist also gleich $B(p_1, p)$. Daraus erkennt man, daſs die Gleichung (3) auch für $n = 1$ gilt, wenn man für das Symbol V den Wert eins nimmt, sobald der untere Index null wird. Ersetzen wir also in der Gleichung (3) n successive durch $1, 2, 3, \cdots n$ und multiplizieren sodann alle Gleichungen, so folgt:

$$V_n^{(p)} = B(p_n, p)B(p_{n-1}, p+p_n)\cdots B(p_1, p+p_n+p_{n-1}+\cdots+p_2),$$

oder, wenn man die Funktionen B durch ihre Werte in Γ ausdrückt:

$$V_n^{(p)} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p+p_1+p_2+\cdots+p_n)}. \tag{4}$$

Für den Fall $p = 1$ reduziert sich das Integral (1) auf

$$V_n^{(1)} = \int\int\cdots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n \tag{5}$$

und ist immer noch für alle positiven Werte der Variabelen zu bilden, welche der Ungleichung $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$ genügen. Die Gleichung (4) ergiebt, weil $\Gamma(1) = 1$ ist:

$$V_n^{(1)} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)}. \tag{6}$$

605. Anwendung der Formel. Auf den eben behandelten Fall läſst sich auch das Integral

$$I = \int\int\cdots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n \tag{7}$$

zurückführen, wenn dasselbe für alle positiven Werte von $x_1, x_2, \cdots x_n$ zu bilden ist, welche der Ungleichung

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\alpha_2} + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} < 1$$

genügen, wobei $a_1, a_2, \cdots a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ gegebene positive Gröſsen sind. Denn wenn man $\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} = z_i$ setzt, also:

$$x_i = a_i z_i^{\frac{1}{\alpha_i}}, \quad dx_i = \frac{a_i}{\alpha_i} z_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}\,dz_i,$$

so wird die Gleichung (7):

$$T = \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \int\int \cdots \int z_1^{\frac{p_1}{\alpha_1}-1} z_2^{\frac{p_2}{\alpha_2}-1} \cdots z_n^{\frac{p_n}{\alpha_n}-1} dz_1 \, dz_2 \cdots dz_n,$$

und daher nach Gleichung (6):

$$(8) \qquad T = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}.$$

Betrachtet man insbesondere das dreifache Integral

$$T = \int\int\int x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \, dx \, dy \, dz,$$

ausgedehnt über alle Elemente, welche in dem von den positiven Richtungen der drei rechtwinkligen Axen gebildeten Oktanten liegen und in dem Ellipsoid enthalten sind, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, so giebt die Gleichung (8) für diesen Fall:

$$(9) \qquad T = \frac{1}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p+q+r}{2}\right)} a^p b^q c^r;$$

setzt man $p = q = r = 1$, so liefert diese Gleichung das Volumen des achten Teiles des Ellipsoides. Setzt man dagegen zwei der Exponenten p, q, r gleich 1 und den dritten gleich 2, so erhält man die *Koordinaten des Schwerpunktes* für den Oktanten eines homogenen Ellipsoides; endlich lassen sich auch aus dieser Formel die *Trägheitsmomente* des homogenen Ellipsoides berechnen.

Siebentes Kapitel.

Funktionen von mehreren reellen Variabelen und mehrgliedrige Differentiale nebst ihren Integralen.

Es sollen in diesem Kapitel alle Vorbereitungen gegeben werden, um die zur Grundlegung der Theorie der komplexen Funktionen nötigen Sätze über Integration von zweigliedrigen Differentialen abzuleiten. Hierzu ist zunächst eine erneute Betrachtung der schon in Nr. 6 definierten Funktionen von mehreren reellen Variabelen nötig.

§ 1. Funktionen von mehreren reellen Variabelen.

606. Vorbemerkung.

Die Funktionen mehrerer reellen Variabelen unterscheiden sich von denen einer reellen Variabelen vor allem durch den gröfseren Variabilitätsbereich (Nr. 6), der um so gröfser ist, je mehr unabhängige Veränderliche wir haben.

Dies sehen wir schon am Beispiel von zwei unabhängigen Variabelen, wo wir zu dem Hülfsmittel der geometrischen Repräsentation greifen. $z = f(x, y)$ wird, wenn wir x, y, z als rechtwinklige Koordinaten deuten, sich als Gleichung einer Fläche auffassen lassen, sobald f eine stetige Funktion (Nr. 6) mit stetigen ersten Differentialquotienten ist. Wir werden uns zumeist auf den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen beschränken, so dafs wir immer zu dieser geometrischen Anschauung greifen können. Neben der Eigenschaft, einen gröfseren Variabilitätsbereich zu besitzen, ist eine weitere bemerkenswert: Wir werden hier auf mehrdeutige Funktionen

stofsen, während wir bei einer einzigen unabhängigen Variabelen die Funktion immer eindeutig bestimmen konnten.

Um die Thatsache der mehrdeutigen Funktion zu erklären, müssen wir zunächst einige Betrachtungen vorausschicken.

Sie sind nötig, weil wir als Variabilitätsbereich jetzt nicht die gerade Linie, sondern die Ebene haben.

607. Einige Definitionen.

a) Wegstück und Weg:

Definition 1: *Wir nennen eine Kurve* (ab) *der* xy-*Ebene ein Wegstück, wenn* x *und* y *sich in dem Intervall* (ab) *als stetige Funktionen eines Parameters* t *darstellen lassen:*

Fig. 32.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

die auch noch erste Differentialquotienten besitzen, und wenn aufserdem die Kurve zwischen a *und* b *kein Maximum, kein Minimum und keinen Wendepunkt hat.*

Beispielsweise würde eine gerade Linie von a nach b als Wegstück zu bezeichnen sein.

Hieran schliefsen wir sofort die weitere

Definition 2: *Eine aus mehreren Wegstücken zusammengesetzte Kurve nennen wir einen Weg.*

Beispielsweise ein gebrochener Linienzug, oder ein Stück einer Geraden u. s. w.

b) Umlauf und Gebiet:

Definition 3: *Ein geschlossener Weg heifst ein Umlauf* ($\mathfrak{U}$), *wenn derselbe keinen Punkt der Ebene zweimal trifft und die Ebene in einen innerhalb liegenden und einen aufserhalb liegenden Teil zerlegt, so dafs man nicht von innen nach aufsen gelangen kann, ohne den Umlauf zu schneiden.*

Ein Kreis oder Quadrat ist also ein Umlauf, nicht dagegen eine Lemniscate.

Definition 4: *Unter dem Gebiet* U *verstehen wir denjenigen Teil der Ebene, welcher innerhalb von* $\mathfrak{U}$ *liegt; dabei werden Punkte von* $\mathfrak{U}$ *selbst ausgeschlossen. Innerhalb von* $\mathfrak{U}$ *gelegen heifst derjenige von* $\mathfrak{U}$ *begrenzte Teil der Ebene, welcher endliche Gröfse besitzt.*

Ein Gebiet U ist also beispielsweise das Innere eines Kreises.

Endlich brauchen wir noch die folgende

Definition 5: Wir nennen die Umlaufsrichtung positiv oder negativ, jenachdem dabei das Innere zur Linken oder zur Rechten liegt.

Positiv ist also z. B. diejenige Umlaufsrichtung des Kreises, welche eine Drehung entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers angiebt.

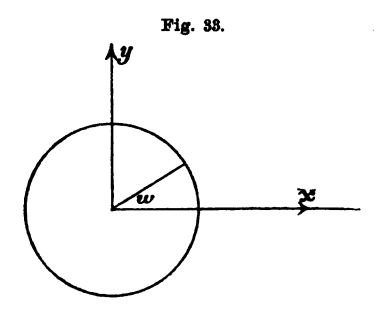
608. Ein Beispiel.

Betrachten wir die Funktion $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

Im rechtwinkligen Koordinatensystem gedeutet, ergiebt dieselbe die schon in Nr. 297 behandelte Schraubenfläche.

Wir nehmen für $y = 0$, $x = 1$ den Wert 0 von arcus tangens 0. Wenn wir dann die Funktion auf dem Einheitskreis stetig fortsetzen, so haben wir für $y = 1$, $x = 0$ den Wert $z = \frac{\pi}{2}$, dann für $x = -1$, $y = 0$ den Wert $z = \pi$ und für $y = 1$, $x = 0$ den Wert $z = \frac{3\pi}{2}$. Wenn wir nun die Funktion weiter fortsetzen bis

Fig. 38.



$x = 1 - \varepsilon, \quad y = \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2},$

so bekommen wir einen Wert nahe an 2π, wenn ε nahe an Null ist.

Wenn wir nun $\varepsilon = 0$ werden lassen, so stehen wir vor zwei Möglichkeiten. Entweder, wir rechnen den Grenzwert, den die Funktion auf dem Wege an dieser Stelle bei stetiger Fortsetzung annimmt, oder nicht. Im ersten Fall bekommen wir den Wert 2π, im zweiten den Wert 0. Im ersten Fall verzichten wir auf die Eindeutigkeit der Funktion, im zweiten Fall auf die Stetigkeit der Fortsetzung. Beides zusammen läfst sich nicht aufrecht erhalten. Wir ziehen es vor, die Stetigkeit aufrecht zu erhalten, und bekommen so die vollständige Schraubenfläche.

609. Eindeutige und mehrdeutige Funktionen.

Definition: Eine Funktion von zwei reellen Veränderlichen heifst eindeutig in einem Gebiet, wenn man bei stetiger Fortsetzung auf verschiedenen Wegen innerhalb dieses Gebietes von demselben Anfangspunkt zu demselben Endpunkt immer denselben Wert erhält.

Beispielsweise sind alle in x und y rationalen Funktionen eindeutig in der ganzen Ebene.

Mehrdeutig heifst die stetige Funktion, wenn man durch stetige Fortsetzung verschiedene Werte erhält.

Eindeutige und mehrdeutige Funktionen haben also die Eigenschaft gemein, dafs man durch stetige Fortsetzung auf einem bestimmten Wege immer einen bestimmten Wert erhält.

Dafs Eindeutigkeit und Stetigkeit bei den Funktionen von zwei reellen Variabelen nicht mehr zusammenfallen, hat seinen Grund darin, dafs man von einem Punkt zu einem anderen auf verschiedenen Wegen gelangen kann und dabei nicht notwendig denselben Endwert zu erhalten braucht, wie unser Beispiel $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ lehrte.

Wir haben definiert, was eindeutig und mehrdeutig in der ganzen Ebene heifst.

Daran schliefsen wir die Definition:

Eine Funktion heifst eindeutig an einer Stelle x, y, wenn man um dieselbe ein Gebiet abgrenzen kann, innerhalb dessen sie eindeutig ist.

Sie heifst mehrdeutig an einer Stelle, wenn man kein noch so kleines Gebiet um den Punkt x, y abgrenzen kann, innerhalb dessen die Funktion eindeutig ist.

Die Mehrdeutigkeit einer Funktion liegt zumeist daran, dafs sie in der Umgebung gewisser Stellen mehrdeutig ist, und man wird immer Gebiete angeben können, innerhalb deren die Funktion, die mehrdeutig ist, wenn man die ganze Ebene in Betracht zieht, sogleich eindeutig wird.

610. Einige Beispiele.

1. $z = x^2 + y^2$ ist eine Funktion, die in der ganzen Ebene eindeutig ist; räumlich gedeutet, stellt sie ein Rotationsparaboloid dar, dessen Rotationsaxe die z-Axe ist.

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist ebenfalls eine eindeutige Funktion, sobald man das Vorzeichen der Wurzel einmal festgelegt hat. Nehmen wir das Zeichen positiv, so bekommen wir den über der xy-Ebene gelegenen Teil des Rotationskegels

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ist ebenfalls eine eindeutige Funktion;

$$z^2 = x^2 - y^2$$

stellt ja einen rechtwinkligen Rotationskegel dar, dessen Axe die x-Axe ist, und für welchen die xy-Ebene ein Meridianschnitt ist. Setzen wir nun in der Wurzel das positive Zeichen fest, so bekommen wir den oberhalb der xy-Ebene gelegenen Teil des Kegels.

Um nun zu mehrdeutigen Funktionen überzugehen, bringen wir folgende Beispiele.

4. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$. Diese Funktion ist mehrdeutig, und zwar nimmt sie bei jedem Umlauf um den Punkt Null in positivem Sinne zu um 2π, bei jedem Umlauf im entgegengesetzten Sinne vermindert sie sich um diesen Betrag.

Sie ist eindeutig in einem Gebiet, welches den Nullpunkt nicht enthält, weil man dann in dem Gebiet keinen Umlauf um den Nullpunkt machen kann, dagegen mehrdeutig in der Umgebung des Nullpunktes.

5. Wir haben hier das Beispiel einer transcendenten Funktion, welche unendlich vieldeutig ist. Wir können uns aber auch eine Funktion bilden, welche algebraisch in x und y ist und eine endliche Anzahl verschiedener Werte zuläßt:

$$z = \cos \frac{\omega}{2},$$

wo

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Freilich ist diese Funktion der Form nach transcendent, in Wirklichkeit aber algebraisch, nämlich

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

Die transcendente Form ist nur deshalb gewählt, um beim Durchgang der verschiedenen vorkommenden Wurzeln durch

den Wert Null das Vorzeichen für den weiteren Verlauf von vorneherein festzulegen.

Wir bekommen eine Fläche, die aus Geraden parallel zur xy-Ebene besteht, und bei der die Ordinate z erst bei zweimaligem Umlauf um den Nullpunkt wieder denselben Wert annimmt.

Die Funktion ist wieder eindeutig in einem Gebiet, das den Nullpunkt nicht enthält, mehrdeutig in einem Gebiet, das den Nullpunkt enthält.

§ 2. Die Integration von exakten Differentialen, welche mehrere unabhängige Variabele enthalten.

611. Bedingungsgleichungen des exakten Differentiales. Die Integration von Differentialen, welche von mehreren Variabelen abhängen, läfst sich, wie gezeigt werden soll, leicht auf die Integration von Differentialen einer einzigen Variabelen zurückführen, indem man den Satz in Nr. 484 anwendet.

Jede Funktion mehrerer unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$, die wir als regulär voraussetzen in dem Sinne, dafs sie nebst ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes stetig ist, hat ein Differential von der Form:

$$(1) \qquad X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + \cdots + X_n\,dx_n.$$

$X_1, X_2, X_3, \cdots X_n$ sind stetige Funktionen der Variabelen $x_1, x_2, x_3, \cdots$. Der umgekehrte Satz besteht aber nicht: Damit der vorstehende Ausdruck das totale Differential einer Funktion der Variabelen $x_1, x_2, x_3, \cdots$ ist, oder, wie man auch sagt, *ein exaktes Differential* ist, müssen vielmehr gewisse Bedingungen erfüllt sein. Denn ist der Ausdruck (1) das Differential einer Funktion $\Omega(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = X_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = X_2, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = X_3, \quad \cdots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = X_n.$$

Betrachtet man nun zwei derselben, z. B.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = X_1, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = X_2$$

und differentiiert man die erste nach x_2, die zweite nach x_1, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1},$$

also:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Hieraus schliefst man, dafs, wenn der Ausdruck (1) ein exaktes Differential sein soll, die Gleichungen notwendig sind:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1}, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1}, \cdots \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} = \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2}, \cdots \dfrac{\partial X_2}{\partial x_n} = \dfrac{\partial X_n}{\partial x_2}, \\ \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n} = \dfrac{\partial X_n}{\partial x_{n-1}}, \end{cases}$$

welche bei allen Werten der Variabelen bestehen, also identisch innerhalb des gegebenen Gebietes erfüllt sein müssen. Die Zahl derselben ist gleich der Anzahl der Kombinationen zu zweien, gebildet aus den Variabelen $x_1, x_2, x_3, \cdots$. Hat man nur zwei unabhängige Variabele x_1 und x_2, so ist der Ausdruck (1):

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2$$

und die Bedingungen (2) reduzieren sich auf die eine:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

612. Integration. Wir wollen nun beweisen, dafs, wenn die Bedingungen (2) erfüllt sind, eine bestimmte Funktion Ω der unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ existiert, für deren totales Differential $d\Omega$ die Gleichung besteht:

$$(3)\quad d\Omega = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + \cdots + X_n\,dx_n.$$

Der allgemeine Ausdruck aller Funktionen Ω, deren partielle Ableitung nach x_1 gleich X_1 ist, lautet:

$$(4)\qquad \Omega = \int_{a_1}^{b_1} X_1\,dx_1 + \Omega_1.$$

Ω_1 bezeichnet dabei noch eine beliebige Funktion der Variabelen $x_2, x_3, \cdots x_n$, enthält aber x_1 nicht mehr.

Man mufs nun Ω_1 so bestimmen, dafs

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = X_2, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = X_3, \cdots \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = X_n$$

wird. Nach dem Satze Nr. 483, den wir hier anwenden dürfen, weil wir voraussetzen, dafs die partiellen Ableitungen der Funktionen $X_1, X_2, \cdots$ ebenfalls stetige Funktionen der Variabelen sind, ist nun:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}.$$

Substituiert man hier für $\frac{\partial X_1}{\partial x_2}$ den identisch gleichen Ausdruck $\frac{\partial X_2}{\partial x_1}$, so folgt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} = X_2 - X_2^1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2};$$

X_2^1 bezeichnet die Funktion X_2, wenn man in derselben für die Variabele x_1 den bestimmten Wert a_1 setzt. Damit also $\frac{\partial \Omega}{\partial x_2}$ gleich X_2 wird, mufs

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} = X_2^1$$

sein. Für die übrigen partiellen Ableitungen von Ω_1 gelten analoge Gleichungen. Also wird die Funktion Ω, welche durch die Gleichung (4) definiert ist, die Gleichung (3) erfüllen, wenn Ω_1, das nur von den Variabelen $x_2, x_3, \cdots x_n$ abhängt, die Differentialgleichung erfüllt:

$$(5) \qquad d\Omega_1 = X_2^1 dx_2 + X_3^1 dx_3 + \cdots + X_n^1 dx_n;$$

$X_2^1, X_3^1, \cdots X_n^1$ bezeichnen die Werte, welche $X_2, X_3, \cdots X_n$ für $x_1 = a_1$ annehmen.

Verfährt man nun mit der Gleichung (5) ebenso, so findet man:

$$\Omega_1 = \int_{a_2}^{b_2} X_2^1 dx_2 + \Omega_2$$

und

$$d\Omega_2 = X_3^{(2)} dx_3 + \cdots + X_n^{(2)} dx_n;$$

$X_3^{(2)}, \cdots X_n^{(2)}$ sind die Werte, welche $X_3, \cdots X_n$ erhalten für $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$.

Es ist ersichtlich, dafs man auf diese Weise für die gesuchte Funktion Ω den Ausdruck erhält:

$$(6)\ \Omega = \int_{a_1}^{b_1} X_1 dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} X_2^{(1)} dx_1 + \int_{a_3}^{b_3} X_3^{(2)} dx_3 + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} X_n^{(n-1)} dx_n + C.$$

Dabei bezeichnet n die Zahl der Variabelen und der Index i bei den Funktionen $X_1, X_2, \cdots X_n$ giebt an, dafs die i ersten Variabelen in der Reihe $x_1, x_2, \cdots x_i$ durch die bestimmten Werte $a_1, a_2, \cdots a_i$ ersetzt sind. C bedeutet eine beliebige von den Variabelen unabhängige Gröfse.

Betrachtet man z. B. den Fall zweier Variabelen x, y, und ist:

(7) $\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy$ mit der Bedingung: $\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}$

das gegebene Differential, so hat das Integral desselben, so bestimmt, dafs es für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, den Wert

$$(8)\qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy.$$

613. Reihenfolge der Integration. Die Bestimmung des Integrales eines Differentiales mit n unabhängigen Variabelen ist also auf n Quadraturen zurückgeführt, welche sich auf die n einzelnen Variabelen beziehen. Man erkennt, dafs diese Quadraturen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Man bekommt dabei immer (bis auf eine Konstante) dieselbe Funktion Ω, weil die Differenz zweier Funktionen Ω' und Ω, welche in der genannten Weise bestimmt sind, die Gleichungen $\frac{\partial(\Omega' - \Omega)}{\partial x_i} = 0$ erfüllt, also konstant ist. So ist z. B. das Integral des Differentiales (7) durch den Ausdruck (8) dargestellt, aber es ist auch gleich

$$(9)\qquad \int_{y_0}^{y} \psi(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx.$$

Denn auch dieser Ausdruck verschwindet, für $x = x_0$, $y = y_0$. Setzt man die beiden einander gleich, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx - \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx = \int_{y_0}^{y} \psi(x, y)\, dy - \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy,$$

oder:

$$(10)\ \int_{x_0}^{x} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y} [\psi(x, y) - \psi(x_0, y)]\, dy.$$

Diese Gleichung gilt also für zwei stetige Funktionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, welche nur an die Bedingung gebunden sind, dafs

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}$$

ist, und dafs diese partiellen Ableitungen ebenfalls stetig sind.

614. Beispiele.

1) Es sei das Integral des Differentiales

$$d\Omega=\frac{x}{(x-y)^2}\,dx-\frac{x^2}{y(x-y)^2}\,dy$$

zu bestimmen. Hier ist:

$$X=\frac{x}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}+\frac{y}{(x-y)^2},\qquad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{2x}{(x-y)^3},$$

$$Y=-\frac{x^2}{y(x-y)^2}=-\frac{1}{y}-\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{1}{x-y},\qquad \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{2x}{(x-y)^3};$$

$$\int_{x_0}^{x}X\,dx=l(x-y)-\frac{y}{x-y}-l(x_0-y)+\frac{y}{x_0-y},$$

$$\int_{y_0}^{y}Y_1dy=-ly-\frac{x_0}{x_0-y}+l(x_0-y)+ly_0+\frac{x_0}{x_0-y_0}-l(x_0-y_0),$$

also:

$$\Omega=l\,\frac{x-y}{y}-\frac{y}{x-y}-l\,\frac{x_0-y_0}{y_0}+\frac{x_0}{x_0-y_0}+C,$$

oder:

$$\Omega=l\,\frac{x-y}{y}-\frac{y}{x-y}+C.$$

C bedeutet eine beliebige Konstante.

2) Es sei das Integral des Differentiales

$$d\Omega=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$$

zu bestimmen. Hier ist

$$X=y+z,\qquad Y=z+x,\qquad Z=x+y,$$

und die Bedingungen des exakten Differentiales sind in der That erfüllt, weil:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=1=\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=1=\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=1=\frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Nun wird

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx = (y+z)x - (y+z)x_0,$$

$$\int_{y_0}^{y} Y_1\,dy = (z+x_0)y - (z+x_0)y_0,$$

$$\int_{z_0}^{z} Z_2\,dz = (x_0+y_0)z - (x_0+y_0)z_0,$$

also:

$$\Omega = yz + zx + xy - y_0z_0 - z_0x_0 - x_0y_0 + C,$$

oder einfacher:

$$\Omega = yz + zx + xy + C.$$

C bezeichnet eine willkürliche Konstante.

§ 3. Kurvenintegrale und inexakte Differentiale.

615. Einführung des Kurvenintegrales. In § 2 haben wir gelernt einen Differentialausdruck

$$X_1\,dx_1 + \cdots + X_n\,dx_n$$

zu integrieren unter der Voraussetzung, dafs er ein exaktes Differential ist. Die Definition des Integrales, von der wir dabei ausgingen, war die durch Umkehrung der Operation des Differenzierens. Wenn wir nun dazu übergehen, die Integration von nicht exakten Differentialausdrücken vorzunehmen, müssen wir auf die Summendefinition des Integrales zurückkommen. Am Ende des Paragraphen werden wir dann sehen, dafs die Definition im Falle eines exakten Differentialausdruckes übereinstimmt mit der im vorigen Paragraphen gegebenen. Zugleich aber müssen wir, wovon im vorigen Paragraphen nicht die Rede war, jetzt bestimmte Integrationswege betrachten.

Wir wollen hier nur zweigliedrige Differentialausdrücke betrachten.

Aufserdem stellen wir die folgende Forderung $\mathfrak{H}$: *X und Y sollen stetige erste Differentialquotienten nach x und y in dem betrachteten Gebiet besitzen.*

Definition: *Unter dem längs einer Kurve erstreckten Integral*

$$\int_a^b (X\,dx + Y\,dy)$$

verstehen wir das Integral

$$\int_a^b \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt}\right) dt,$$

wo x und y beide als Funktionen von t betrachtet sind, so daſs

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

die betreffende Kurve darstellt.

Dabei nehmen wir immer an, daſs die Kurve ein Weg ist. (Nr. 607.)

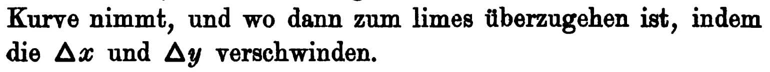
Es ist leicht einzusehen, daſs diese Definition auf die frühere Summendefinition, wie wir sie beim einfachen Integral kennen lernten, zurückkommt. Es ist nämlich

Fig. 34.

$$\int_a^b \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \text{Limes}\, S(X\Delta x + Y\Delta y),$$

wo Δx und Δy Koordinatenzuwächse sind, die man längs der



Kurve nimmt, und wo dann zum limes überzugehen ist, indem die Δx und Δy verschwinden.

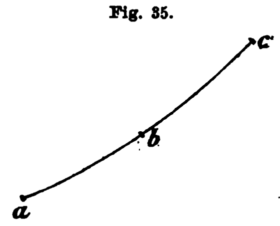
Aus dieser Definition ergeben sich sofort einige einfache Sätze.

a) *Es ist das längs einer Kurve von a nach b erstreckte Integral entgegengesetzt gleich dem von b nach a erstreckten Integral.*

$$\int_a^b (X dx + Y dy) = -\int_b^a (X dx + Y dy).$$

In der That setzen sich beide Integrale aus denselben Elementen zusammen, doch treten dx und dy im zweiten Integral gerade mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf, wie im ersten.

Fig. 35.



Aus dem Umstand, daſs sich das Integral auffassen läſst als Grenzwert einer Summe, folgt auch sofort der folgende Satz

b) $$\int_a^b (X dx + Y dy) + \int_b^c (X dx + Y dy) = \int^c (X dx + Y dy).$$

Beide Sätze beruhen darauf, daſs das längs einer Kurve erstreckte Integral ein bestimmtes Integral mit einer unabhängigen Veränderlichen t ist, und für solche Integrale haben wir die beiden Sätze früher bewiesen. (Nr. 410.)

616. Verwandlung eines Kurvenintegrales in ein Flächenintegral. Wir beweisen jetzt den für das Folgende wichtigen

Satz: Erfüllen X und Y in einem Gebiete U der xy-Ebene die Forderung $\mathfrak{H}$, so besteht die Relation

$$\int_{\mathfrak{U}} (X\,dx + Y\,dy) = \iint_U \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Wir beweisen den Satz zunächst für das Gebiet, das von jeder Geraden, die parallel zu einer Koordinatenaxe ist, nur zweimal getroffen wird.

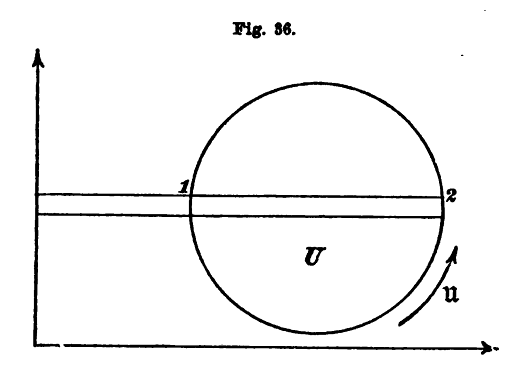
Der Beweis ist folgendermaſsen zu führen:

Wir zeigen zuerst, daſs

$$\iint_U \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{U}} Y\,dy \quad \text{ist.}$$

Dies geschieht, indem wir auf die Summendefinition des Integrales zurückgehen.

Fig. 36.



Das auf der rechten Seite stehende Integral fassen wir auf als

$$\text{Limes}\; S\,\Delta Y \int \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx$$

und zerlegen nun die Fläche in Streifen parallel zur x-Axe.

Wir haben dann (s. Figur 36):

$$\int \frac{\partial Y}{\partial x} dx = Y_2 - Y_1,$$

unter Y_2 und Y_1 die Funktionswerte von Y an den Stellen 1 und 2 verstanden, und

$$\Delta Y \int \frac{\partial Y}{\partial x} dx = \Delta y_1 \cdot Y_1 + \Delta y_2 \cdot Y_2.$$

Hier ist $\Delta y_1 = -\Delta y$ und $\Delta y_2 = \Delta y$ gesetzt, so wie diese Elemente beim positiven Umlauf von $\mathfrak{U}$ in Betracht kommen.

Bilden wir nun die Summe und gehen zum Limes über, so kommt

$$\int\int_U dy\, dx \frac{\partial Y}{\partial x} = \int_{\mathfrak{U}} Y dy.$$

Durch Zerlegung in Streifen parallel zur y-Axe bekommt man den analogen Satz:

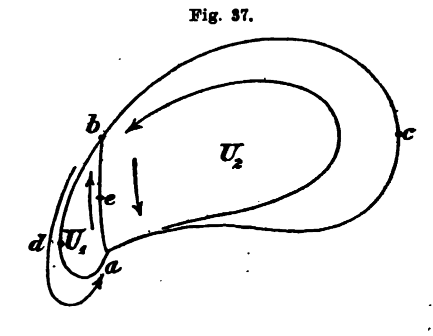
$$\int\int_U \frac{\partial X}{\partial y} dx\, dy = \int_{\mathfrak{U}} X dx.$$

Durch Addition folgt

$$\int\int_U \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\mathfrak{U}} (X dx + Y dy).$$

Damit ist der Satz für Gebiete, wie wir sie oben definiert haben, bewiesen.

Fig. 37.



Wir zeigen nun weiter, daſs der Satz für ein Gebiet U gilt, wenn er für zwei Teilgebiete $U_1\, U_2$ gilt.

Zunächst ist

$$\int_{\mathfrak{U}_2} (X dx + Y dy) = \int_{U_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy$$

und ebenso

$$\int_{\mathfrak{U}_1} (X dx + Y dy) = \int\int_{U_1} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Addiert man auf der rechten Seite, so bekommt man

$$\int\int_U \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Addiert man auf der linken Seite, so bekommt man, da der Umlauf $\mathfrak{U}_2$ sich zusammensetzt aus den Kurvenstücken $a c b$ und $b e a$, $\mathfrak{U}_1$ dagegen aus $a e b$ und $b d a$, das Integral über $a c b$ und $b d a$; da ferner das Integral von b bis a über e sich gegen das von a bis b über e genommene Integral forthebt (Nr. 615), bleibt gerade

$$\int_{\mathfrak{U}} (X dx + Y dy).$$

Demnach kommt

$$\int_{\mathfrak{U}} (X dx + Y dy) = \int\int_U dx\, dy \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Damit ist der Satz zugleich auch bewiesen für Gebiete, welche sich aus beliebig vielen Gebieten der oben genannten Eigenschaft zusammensetzen.

Diese Eigenschaft besitzt aber jedes Gebiet. (Nr. 607.) Man braucht beispielsweise nur in eine geeignete Anzahl von Streifen parallel zur x- und y-Axe zu zerlegen. Im Inneren ergeben sich dann Rechtecke, die, wie ohne weiteres klar ist, die gewünschte Eigenschaft haben, am Rande bekommt man Kurvenstücke, und man kann wegen der vorausgesetzten Eigenschaften des Umlaufes $\mathfrak{U}$ ihn so durch Parallelen zur x- und y-Axe zerlegen, daſs kein solches zu einem Teilgebiet gehöriges Kurvenstück von einer solchen Geraden zweimal getroffen wird.

Daraus ergiebt sich aber die allgemeine Gültigkeit des Satzes.

617. Anwendung auf exakte Differentiale. Mit Hülfe unseres Satzes können wir nun sofort zeigen, daſs das Kurvenintegral, genommen über ein exaktes Differential, nur abhängt von der oberen Grenze.

Beim exakten Differential haben wir ja

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

und wenn wir nun das Integral von $x_0 y_0$ zu $x_1 y_1$ erstrecken auf zwei verschiedenen Wegen, so ist

$$\int\limits_{\mathfrak{a}_1}(X\,dx + Y\,dy) - \int\limits_{\mathfrak{a}_2}(X\,dx + Y\,dy)$$
$$= \int\limits_{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

Fig. 38.

wo $\mathfrak{A}$ das dazwischen liegende Gebiet ist, also

$$\int\limits_{\mathfrak{a}_1}(X\,dx + Y\,dy) - \int\limits_{\mathfrak{a}_2}(X\,dx + Y\,dy) = 0,$$

d. h.
$$\int\limits_{\mathfrak{a}_1}(X\,dx + Y\,dy) = \int\limits_{\mathfrak{a}_2}(X\,dx + Y\,dy).$$

Wir haben also den Satz:

Erfüllen in einem Gebiet U die Funktionen X und Y die Forderung $\mathfrak{H}$ und außerdem die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

so ist das längs einer beliebigen Kurve innerhalb des Gebietes von einem bestimmten Anfangspunkt aus erstreckte Integral nur abhängig von der oberen Grenze.

Hieraus folgt zugleich auch die Identität mit der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition.

Die hier erhaltene Funktion $F(x, y)$ (wir schreiben statt der oberen Grenze x_1, y_1 wieder x, y) unterscheidet sich, da nämlich sie die partiellen Differentialquotienten X und Y besitzt, von der früheren nur um eine additive Konstante, die man $= 0$ festsetzen kann.

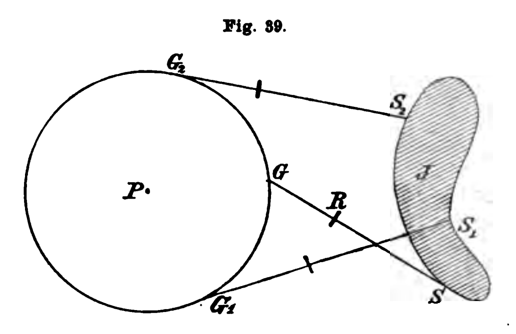
§ 4. Das Polarplanimeter.

Als Beispiel für die Integration eines mehrgliedrigen Differentiales mit sehr einfachen Koeffizienten wollen wir hier die Ausmessung des Flächeninhaltes durch das Amsler'sche Polarplanimeter behandeln.

618. Das Planimeter und seine Bewegung. Der Apparat besteht im Prinzip aus zwei Stäben, die durch ein Gelenk G verbunden sind. Das eine Ende P des einen Stabes wird festgehalten (fester Pol P), das des anderen trägt einen Fahrstift S und außerdem eine Rolle R, die an einer dem Stabstücke GS

parallelen Axe befestigt ist. Nun bewegt man den Apparat so, daſs man mit dem Fahrstift S den auszumessenden Flächeninhalt umfährt. Dabei wird sich G auf einem Kreis hin und her be-

Fig. 39.

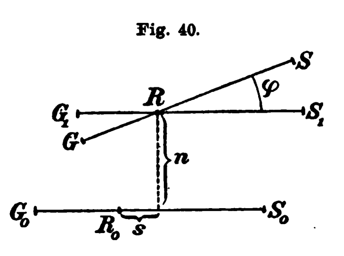


wegen und seine Bewegung wird (bei unserer Figur) zwei Umkehrpunkte $G_1 G_2$ haben, die den Punkten $S_1 S_2$ entsprechen, wo $G_1 S_1 = G_2 S_2$ gleich der Länge e des Stabes GS ist. Es wird nun behauptet, daſs die Umdrehung der Rolle R den Flächeninhalt unseres Flächenstückes J angiebt, wenn man mit dem Fahrstift S dasselbe einmal umläuft.

Genauer muſs man sagen: Der Winkel w, um den sich die Rolle in positivem Sinn dreht, unterscheidet sich nur durch den Faktor $e\varrho$ von dem Flächeninhalt, den der Stab in positivem Sinn überstreicht, wo ϱ den Radius der Rolle bedeutet.

Positiv heiſst hier die Drehung der Rolle, wenn sie, in der Richtung von G nach S gesehen, in einem Sinne erscheint, der dem des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Positiv überstrichen heiſst ein Flächenstück, wenn sich der in der Richtung GS genommene Stab nach links gegen die Anfangslage bewegt bei Überstreichung des Flächenstückes.

Fig. 40.



Wir wollen nun die Bewegung des Stabes e genauer untersuchen und zwar denken wir uns jetzt auch das Ende G freibeweglich. Irgend eine Lage GS des Stabes ist dann durch drei Koordinaten in Bezug auf eine gegebene Anfangslage $G_0 S_0$ bestimmt. Hierzu wählen wir die folgenden Gröſsen.

Wir ziehen durch den Punkt R, welcher die Lage der Rolle R markiert, eine Linie $G_1 S_1$ parallel zur Anfangslage $G_0 S_0$ des Stabes GS, so dafs $G_1 R = G_0 R_0$, $RS_1 = R_0 S_0$ wird, wo R_0 die Anfangslage der Rolle bezeichnet. Wir projizieren R auf $G_0 S_0$ und nennen s den Abstand des Projektionspunktes von R_0, n den Abstand desselben Punktes von R. Endlich sei φ der Winkel zwischen $G_1 S_1$ und GS.

Wir wollen nun sehen, um welchen Winkel Δw die Rolle R um ihre Axe sich dreht, wenn wir den Stab erst um ein Stück Δs in seiner Richtung, dann um Δn normal zu dieser verschieben und ihn endlich um R um den Winkel $\Delta \varphi$ drehen.

619. Die Drehung der Rolle.

a) Wenn wir den Stab in in seiner eigenen Richtung etwa um die Strecke Δs verschieben, so wird sich dabei die Rolle nicht drehen, wir haben also:

$$\Delta w = 0 \cdot \Delta s = 0.$$

b) Wenn wir ihn senkrecht gegen seine Richtung verschieben um die Strecke Δn, so ist:

$$\Delta w = \frac{\Delta n}{\varrho}.$$

c) Wenn wir den Stab um den Winkel $\Delta \varphi$ um den Unterstützungspunkt R der Rolle drehen, so wird sich die Rolle nicht um ihre Axe drehen. Wir haben also:

$$\Delta w = 0 \cdot \Delta \varphi = 0.$$

Im ganzen, wenn wir alle drei Bewegungen *nach einander* ausführen, bekommen wir also die Umdrehung

$$\Delta w = \frac{\Delta n}{\varrho}.$$

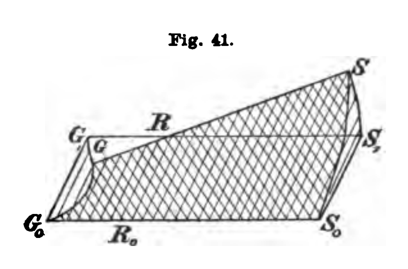
620. Der vom Stabe *e* überstrichene Flächeninhalt. Wir wollen nun den Stab e, den wir uns frei denken, eine bestimmte Bewegung ausführen lassen, indem beide Enden Kurven beschreiben. Alsdann werden die oben definierten Gröfsen φ, n und s sich als Funktionen eines Parameters t (etwa der Zeit, in welcher man die Bewegungen ausführt) darstellen lassen, ebenso der vom Stab überstrichene Flächeninhalt F. Dabei definieren wir den vom Stabe GS überstrichenen Flächeninhalt

als den Inhalt desjenigen Flächenstückes $G_0 S_0 S G$ (vergl. Fig. 41), das von der Anfangslage $G_0 S_0$ und der Endlage GS des Stabes einerseits und andrerseits von den Kurven $G_0 G$, $S_0 S$ begrenzt ist, welche die Endpunkte G und S beschreiben.

Wir stellen uns nun zunächst die Aufgabe, den Differentialquotienten von F nach der Zeit auszudrücken durch die Differentialquotienten von φ, n und s nach der Zeit.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in Figur 41 zunächst die Konstruktion der Figur 40 wiederholt und die der Lage GS entsprechenden Koordinaten s, n, φ ermittelt. Alsdann verbinden wir die Endpunkte G_1 und S_1 unserer Hülfsgeraden $G_1 S_1$ einmal mit G_0 bezw. S_0 durch parallele Gerade, sodann mit G bezw. S durch die bei der Drehung um R beschriebenen Kreisbögen $\widehat{G_1 G}$ bezw. $\widehat{S_1 S}$. Wir bezeichnen nun mit Ψ den Flächeninhalt $G_0 S_0 \widehat{S_1 S} \widehat{G G_1} G_0$, den der Stab überstrichen haben würde, wenn er erst parallel nach $G_1 S_1$ verschoben und dann um R in die Lage GS gedreht worden wäre.

Fig. 41.



Nennt man e'' die Länge des Stabstückes GR, e' die des Stückes RS, so ergiebt sich für Ψ der Wert:

$$(1) \quad \Psi = e \cdot n + \frac{e'^2 - e''^2}{2} \cdot \varphi.$$

Andrerseits folgt aus der Figur:

$$\Psi - F = \widehat{G_0 G G_1} + \widehat{S_0 S S_1}.$$

Ferner ist:

$$|G_0 G G_1| < nb, \qquad |S_0 S S_1| < b_1 \cdot (e''\varphi + n),$$

wo b bezw. b_1 die längste der Parallelen bedeutet, die innerhalb $G_0 G G_1$ bezw. innerhalb $S_0 S S_1$ zu $G_0 S_0$ gezogen werden können.

Daher wird:

$$(2) \qquad |F - \Psi| < nb + (e''\varphi + n) \cdot b_1.$$

Dieselbe Betrachtung nun, die wir für die Anfangs- und Endlagen unseres Stabes angestellt haben, können wir auf irgend welche Zwischenlagen anwenden. Wir können uns z. B. vorstellen, daſs in der Zeit von t bis $t + \Delta t$ die Zu-

wüchse ΔF und $\Delta \Psi$ der Flächeninhalte F und Ψ gemessen und auf diese unsere Formeln angewandt werden.

Wir haben dann nur zu bestimmen, um welchen Winkel $\Delta \varphi$ sich der Stab in der Zeit Δt gedreht, und um welches Stück Δn er sich senkrecht zu seiner momentanen Richtung zur Zeit t bewegt hat und finden aus (1):

$$\Delta \Psi = e \cdot \Delta n + \frac{e'^2 - e''^2}{2} \cdot \Delta \varphi$$

und aus (2):

$$|\Delta F - \Delta \Psi| < b \cdot \Delta n + b_1 \cdot (\Delta n + e'' \cdot \Delta \varphi),$$

wo b und b_1 sich nun auf das Zeitintervall Δt beziehen.

Nach der vorigen Nummer können wir an Stelle von Δn den Winkel Δw einführen, um welchen sich die Rolle in der Zeit Δt gedreht hat, es wird:

$$\Delta n = \varrho \cdot \Delta w.$$

Daher folgt nach Division durch Δt:

$$\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = e \cdot \varrho \frac{\Delta w}{\Delta t} + \frac{e'^2 - e''^2}{2} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta t} - \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}\right| < b\varrho \frac{\Delta w}{\Delta t} + b_1 \left(\varrho \frac{\Delta w}{\Delta t} + e'' \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}\right).$$

Für $\Delta t = 0$ wird die rechte Seite der letzten Ungleichheit ebenfalls 0, mithin folgt durch Grenzübergang:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} = e\varrho \frac{dw}{dt} + \frac{e'^2 - e''^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

für den gesuchten Differentialquotienten.

Wir finden hieraus das vollständige Differential:

$$dF = e\varrho \cdot dw + \frac{e'^2 - e''^2}{2} d\varphi,$$

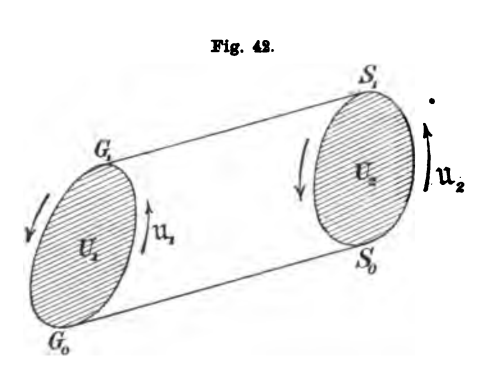
dessen Integral, zwischen den entsprechenden Grenzen genommen, uns den in der Zeit t überstrichenen Flächeninhalt liefert:

$$F = \int \left(e\varrho\, dw + \frac{e'^2 - e''^2}{2} d\varphi\right) = e\varrho w + \frac{e'^2 - e''^2}{2} \cdot \varphi.$$

Dabei bedeutet w den Winkel, um den sich die Rolle, φ den Winkel, um den sich der Stab in der Zeit t gedreht hat.

Um nun die praktische Anwendung des Polarplanimeters anzugeben, brauchen wir nur noch den Satz:

Fig. 42.



Bewegt man den Stab so, daſs die Enden G und S dabei zwei von einander getrennte Umläufe $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ beschreiben, so besteht für die zugehörigen Flächeninhalte die Formel:

$$U_2 = U_1 + e\varrho w.$$

Dieser Satz wird so bewiesen:

Bei der Endstellung des Stabes hat φ wieder den Anfangswert 0, und w, das zu Anfang den Wert 0 hatte, bekommt einen bestimmten Endwert w. Also wird:

$$F = e\varrho w.$$

Ferner liefert bei der angegebenen Bewegung U_2 einen positiven, U_1 einen negativen Beitrag und das dazwischen liegende Flächenstück hebt sich heraus, also wird:

$$F = U_2 - U_1.$$

Daher folgt:

$$U_2 - U_1 = e\varrho w.$$

Liegt speziell der in Figur 39 betrachtete Fall des Polarplanimeters vor, so ist $U_1 = 0$, also der umfahrene Flächeninhalt

$$U = ew\varrho,$$

wie in Nr. 618 behauptet war.

Man miſst also geschlossene Flächeninhalte mit dem Polarplanimeter, indem man an der Rolle den Winkel abliest, um welchen sich diese dreht, während der Stift S die Begrenzung des gesuchten Flächeninhaltes umfährt.

Achtes Kapitel.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

---

621. Ziel der Entwickelungen dieses Kapitels. Im elften Kapitel des ersten Bandes haben wir die Regeln der Differentialrechnung auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen übertragen. Wir stellen uns jetzt die analoge Aufgabe, auch eine Integralrechnung der Funktionen einer komplexen Variabelen zu begründen. Dabei wird es sich als zweckmäfsig erweisen, statt — wie bisher (Nr. 366) — von dem Begriff der analytischen Funktion auszugehen, die uns in einem bestimmten Bereich durch eine Potenzreihe definiert ist, den allgemeineren Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen überhaupt zu Grunde zu legen. Es erwächst uns so eine dreifache Aufgabe:

1. Genaue Festlegung des Begriffes „Funktion einer komplexen Variabelen".

2. Studium der Eigenschaften dieser Funktionen.

3. Untersuchung der Frage, inwieweit die Begriffe „analytische Funktion" und „Funktion einer komplexen Variabelen" sich decken.

Im Einzelnen ist die Disposition des Kapitels diese:

Der erste Paragraph dieses Kapitels untersucht die Funktionen einer komplexen Variabelen überhaupt, der zweite unterscheidet sie in eindeutige und mehrdeutige, der dritte handelt von ihrer Integration, der vierte von ihrer Entwickelung in Potenzreihen, und der fünfte bringt schliefslich eine Übertragung der Resultate auf Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen.

§ 1. Die komplexe Funktion.

622. Definition der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Wir definieren mit Cauchy die Funktion einer komplexen Veränderlichen, oder kürzer die komplexe Funktion in folgender Weise:

Definition: $w = f(z) = u + iv$ *heifst eine Funktion der komplexen Veränderlichen* $z = x + iy$, *(auch kurz „komplexe Funktion" oder „Funktion von* z*"), wenn ihr reeller Teil* u *und ihr imaginärer Teil* vi *den partiellen Differentialgleichungen genügen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diese Definition bedarf der Erläuterung.

Zunächst wird man, verführt durch die Begriffsbestimmung bei reellen Veränderlichen, die Funktion so definieren wollen:

w ist eine Funktion von z, wenn jeder komplexen Zahl z eine komplexe Zahl w zugeordnet wird.

In diesem Falle würden aber x, y, $x - iy$ Funktionen von z sein, während man naturgemäfs bei einer Funktion von z die Veränderlichen x und y nur in der Verbindung $x + yi$ wird haben wollen.

Dies ist nun aber bei der Cauchyschen Definition der Fall, wie wir zunächst an einigen Beispielen zeigen wollen.

Jede analytische Funktion fällt unter diese Definition (nach Nr. 378), und es sind also beispielsweise alle rationalen Funktionen, ferner e^z, $\sin z$, $\cos z$, lz und z^m bei beliebigem m *komplexe* Funktionen.

Alle diese Beispiele enthalten, wie überhaupt jede analytische Funktion, x und y nur in der Verbindung $z = x + iy$.

Andererseits genügen Ausdrücke wie x, y, $x - yi$, wie man sich leicht überzeugt, nicht den Differentialgleichungen der Nr. 2. Hiernach wird es schon sehr wahrscheinlich, dafs die Cauchysche Definition nur solche Funktionen von x und y umfafst, welche x und y in der Verbindung $x + yi$ enthalten.

In Nr. 641 werden wir aber erkennen, dafs jede Funktion von z — unter gewissen Stetigkeitsbedingungen — eine analytische Funktion von z ist, woraus sich ergiebt, dafs dann

auch die **Cauchy**sche Definition besagt, dafs die Funktion x und y nur in der Verbindung $x + yi$ enthält.

623. Die Gruppeneigenschaft. Aus den in der vorigen Nummer angeführten Funktionen können wir durch Zusammensetzung neue Funktionen bilden, so z. B. aus e^z und z^m die Funktion e^{z^m}. Solche Funktionen sind wieder Funktionen von z.

Die Funktionen besitzen nämlich die sogenannte

Gruppeneigenschaft. Eine komplexe Funktion einer komplexen Funktion ist wieder eine komplexe Funktion.

In der That, es sei

$$w = f(z) = u + vi, \tag{1}$$

wo

$$z = x + iy, \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

ist, eine Funktion von z. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Es sei ferner

$$W = F(w) = U + Vi, \tag{3}$$

wo

$$U = \Phi(u, v), \quad V = \Psi(u, v)$$

ist, eine Funktion von w. Alsdann wird auch, wie man leicht nachrechnet:

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v}, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial U}{\partial v}. \tag{4}$$

Setzen wir nämlich für w seinen Wert aus (1) in (3) ein, so wird

$$W = F(f(z)) = U + Vi,$$

wo

$$U = \Phi(\varphi, \psi) \quad \text{und} \quad V = \Psi(\varphi, \psi)$$

ist. Nun wird aber:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

und analog

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Hiermit ist die Behauptung erwiesen.

Freilich setzen die angewandten Differentiationsregeln nach Nr. 40 die Stetigkeit der benützten Ableitungen voraus.

Wir stellen daher die

Forderung J: Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von u und v sind stetig,

und erkennen:

Die Gruppeneigenschaft ist erfüllt für die Funktionen $f(z)$, welche der Forderung J genügen.

Um einige einfache Anwendungen der Gruppeneigenschaft zu geben, wollen wir hervorheben, dafs — unter c eine Konstante verstanden — cw und $\frac{1}{w}$ Funktionen von z sind, wenn w eine solche ist; denn cz und $\frac{1}{z}$ sind ja Funktionen von z. In diesem Kapitel wird noch durch Verallgemeinerung der Gruppeneigenschaft gezeigt werden, dafs wenn w_1 und w_2 Funktionen von z sind, auch

$$w_1 + w_2, \quad w_1 - w_2, \quad w_1 \cdot w_2, \quad \frac{w_1}{w_2}$$

Funktionen von z sind. Mit anderen Worten:

Die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient zweier Funktionen von z sind wieder Funktionen von z.

So sind beispielsweise die Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{ctg} z$, die durch die Gleichungen erklärt sind:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

Funktionen von z.

624. Ableitung einer Funktion von z. Wie bei den analytischen Funktionen (Nr. 369) definieren wir die Ableitung allgemein durch die Gleichung:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \operatorname*{limes}_{h=0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Wir nehmen an, $f(z)$ erfüllt die Forderung J. Alsdann wird:

$$(1) \qquad \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}}{1 + i\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

an der Stelle $\Delta z = 0$, d. h. $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$.

Hieraus folgt zunächst ein bestimmter Wert von $\lim \frac{\Delta w}{\Delta z}$, wenn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen bestimmten Grenzwert annimmt. In der That, wird $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, so folgt

$$(2) \qquad \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i\right) \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy}{dx} i}$$

$$= \frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy}{dx} i}.$$

Aus den Differentialgleichungen für u und v folgt nun zweitens, daſs dieser Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ ganz unabhängig ist. Soll dies nämlich der Fall sein, so ist hierfür notwendig und hinreichend, daſs für jeden Wert von $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{dy}{dx} i\right) f'(z).$$

Dies geht aber nur dann, wenn auf beiden Seiten die von $\frac{dy}{dx}$ freien Glieder und die mit $\frac{dy}{dx}$ multiplizierten Glieder übereinstimmen, d. h. es muſs sein:

$$(3) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z), \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = f'(z) \cdot i$$

oder

$$(4) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} i,$$

was aber, wie man durch Einführung von u und v und Trennung in reellen und imaginären Teil erkennt, auf die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

hinauskommt. —

Es existiert also $f'(z)$. Diese Ableitung ist aber auch stetig, wie aus der ersten Gleichung (3) zusammen mit der Forderung J hervorgeht.

Damit haben wir den Satz erhalten:

Satz: Die Funktion $w = f(z)$ erfülle die Forderung J. Alsdann besitzt sie eine stetige Ableitung, deren Wert unabhängig ist von $\frac{dy}{dx}$.

Ist umgekehrt $\frac{dw}{dz}$ *unabhängig von* $\frac{dy}{dx}$, *so ist* w *eine Funktion von* z.

Aus diesem Satze lassen sich wichtige Folgerungen ziehen.

Zunächst schliefsen wir, dafs die Forderung J sich auch so formulieren läfst:

Forderung J. $f(z)$ *und seine Ableitung* $f'(z)$ *sind stetige Funktionen von* z.

Ferner hatten wir allein aus der Thatsache, dafs $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von $\frac{dy}{dx}$ ist, in Nr. 380—382 erschlossen, dafs die *analytische* Funktion eine konforme Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene bewirkt. Diese Eigenschaft überträgt sich also auch auf bel. komplexe Funktionen, wenn sie nur die Forderung J erfüllen.

Man erkennt leicht, dafs sich die Differentiationsregeln der reellen Funktionen von reellen Veränderlichen in ganz analoger Weise auf Funktionen von z übertragen, sowie dafs der Differentialquotient einer Funktion von z selbst wieder eine Funktion von z ist. Der Beweis dieser Sätze möge dem Leser überlassen bleiben.

§ 2. Eindeutige und mehrdeutige Funktionen.

625. Definition der mehrdeutigen Funktionen. In Kap. VI dieses Bandes haben wir die Funktionen zweier reeller Variabeler eingeteilt in eindeutige und mehrdeutige Funktionen. Wir können jetzt die dort gegebenen Definitionen unmittelbar auf komplexe Funktionen übertragen.

Definition: $w = f(z) = u + vi$ *ist eine mehrdeutige Funktion* z, *wenn mindestens eine der beiden Funktionen* u *und* v *eine mehrdeutige Funktion von* (x, y) *ist.*

Wir geben jetzt einige Beispiele.

626. Die Funktion $\sqrt{z}$. Betrachten wir z. B. die Funktion $w = \sqrt{z}$ und setzen nach Nr. 357

$$z = \varrho e^{i\omega},$$

so dafs

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{\varrho}\, e^{\frac{\omega i}{2}}$$

wird. Betrachten wir diesen Ausdruck als Funktion von x und y, so ist $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ eindeutig, $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ aber eine vieldeutige Funktion von x und y (Nr. 610, 4), mithin wird auch w eine vieldeutige Funktion von z sein.

Beschreibt der Punkt z in der Gaufsschen Ebene einen Umlauf $\mathfrak{W}$ (Fig. 43) in positivem Sinne um den Nullpunkt, so vermehrt sich (Nr. 610, 4) bei demselben $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ um 2π, während ϱ den Anfangswert wieder annimmt. Daher multipliziert sich w mit

Fig. 43.

$$e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1;$$

d. h.:

Macht z einen Umlauf um den Nullpunkt, so multipliziert sich $\sqrt{z}$ mit dem Faktor -1.

Beschreibt dagegen z einen Umlauf, der den Nullpunkt aufserhalb läfst, so bleibt $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ ungeändert, folglich:

Macht z einen Umlauf, welcher den Nullpunkt ausschliefst, so bleibt $\sqrt{z}$ ungeändert.

627. Weitere Beispiele von eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen. Hätten wir dagegen die Funktion $w = z^m$ derselben Behandlung unterworfen, wo m eine ganze Zahl ist, so hätte sich w mit $e^{2m\pi i} = 1$ multipliziert, also denselben Wert erhalten; z^m ist eben bei ganzzahligem m eine eindeutige Funktion.

Überhaupt sind, wie man sich leicht überzeugt, eindeutige Funktionen:

1) Die ganzen rationalen Funktionen.

2) Die gebrochenen.

3) e^z, $\sin z$, $\cos z$ und überhaupt alle beständig konvergenten Potenzreihen.

4) $\operatorname{tang} z$ und überhaupt der Quotient zweier beständig konvergenter Potenzreihen.

Hingegen sind mehrdeutige Funktionen:

1) $\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}$ und überhaupt alle Funktionen z^m, wo m keine reelle ganze Zahl ist.

2) Der Logarithmus und andere Funktionen, die wir im *dritten* Paragraphen untersuchen werden.

628. Die Funktion $\sqrt{z-a}$. Um die Funktion

$$w = \sqrt{z-a}$$

zu studieren, bilden wir die z-Ebene vermöge der Substitution

$$z' = z - a$$

eineindeutig auf eine z'-Ebene ab.

Es entspricht dann einem Umlauf in der z-Ebene, in dessen Inneren sich a befindet (bezw. sich nicht befindet) ein Umlauf in der z'-Ebene, in dessen Inneren sich der Nullpunkt befindet (bezw. sich nicht befindet). Andererseits wird:

$$w = \sqrt{z'},$$

wir schliefsen daher aus den Resultaten der vorigen Nummer:

Die Funktion $\sqrt{z-a}$ nimmt, wenn z auf einem Umlauf nach seinem Ausgangspunkt zurückkehrt, denselben oder den entgegengesetzten Wert an, jenachdem der Umlauf den Punkt a in seinem Inneren enthält oder nicht.

Betrachten wir allgemeiner die Funktion

$$\sqrt{z-a}\, E(z),$$

wo $E(z)$ in der Umgebung von $z-a$ eindeutig und stetig ist, und machen einen Umlauf, der in dieser Umgebung verläuft, so wird sich ganz dasselbe Verhalten zeigen wie bei $\sqrt{z-a}$. Denn $E(z)$ erhält am Ende eines jeden solchen Weges denselben Wert wie zu Anfang nach Voraussetzung; $\sqrt{z-a}$ erhält aber denselben Wert oder den entgegengesetzten, jenachdem der Punkt $z=a$ sich innerhalb oder aufserhalb des Weges befindet. Also wechselt auch das Produkt $\sqrt{z-a}\, E(z)$ sein Zeichen oder nicht, jenachdem der Punkt a ein innerer oder ein äufserer ist.

629. Die Funktion $\sqrt{(z-a)(z-b)}$. Machen wir um den Punkt a einen Umlauf, in dessen Inneren sich jedoch der Punkt b nicht befindet, so hat die Funktion

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

den Charakter von $\sqrt{(z-a)}\,E(z)$; denn $E(z) = \sqrt{z-b}$ ist im Inneren eindeutig; die Funktion w wechselt also ihr Zeichen. Sie behält dagegen ihr Zeichen, wenn sowohl a als b sich aufserhalb des Umlaufes befinden. Hingegen wechselt sie wieder ihr Zeichen, wenn b innerhalb, aber a aufserhalb liegt; denn der Punkt a und der Punkt b sind gleichberechtigt.

Um endlich zu erkennen, wie die Funktion

$$w = \sqrt{(z-a)\,(z-b)}$$

sich verhält, wenn beide Punkte a und b innerhalb des Umlaufes liegen, machen wir uns nebenstehende Konstruktion. Wir verbinden die beiden Punkte A und B des Weges $\mathfrak{W}$ durch eine Kurve, welche die beiden Punkte a und b trennt.

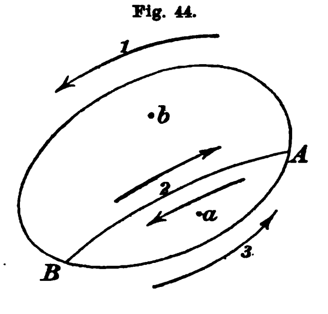


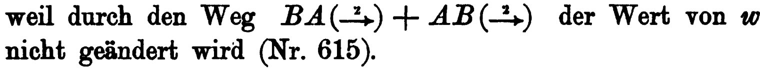
Fig. 44.

Nun können wir den Umlauf (Figur 44)

$$\mathfrak{U} = AB(\xrightarrow{1}) + BA(\xrightarrow{3})$$

ersetzen durch

$$AB(\xrightarrow{1}) + BA(\xrightarrow{2}) + AB(\xrightarrow{2}) + BA(\xrightarrow{3}),$$



weil durch den Weg $BA(\xrightarrow{2}) + AB(\xrightarrow{2})$ der Wert von w nicht geändert wird (Nr. 615).

Aus Nr. 628 folgt aber, dafs w nach dem Umlauf 1, 2 sowohl wie nach dem 2, 3 sein Vorzeichen ändert. Nach Durchlaufen beider Wege ist also das Vorzeichen wieder das anfängliche.

Nennen wir die Punkte a und b *Verzweigungspunkte* der Funktion

$$w = \sqrt{(z-a)\,(z-b)},$$

so können wir zusammenfassen:

Satz: Bei einem Umlauf um eine gerade Zahl (0 *oder* 2) *von Verzweigungspunkten behält* $\sqrt{(z-a)\,(z-b)}$ *das Zeichen, bei einem Umlauf um eine ungerade Zahl* (1) *von Verzweigungspunkten wechselt* $\sqrt{(z-a)\,(z-b)}$ *das Zeichen.*

630. Die Funktion $\sqrt{(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,(z-d)}$. Man kann allgemein die Funktion $\sqrt{G(z)}$ betrachten, wo G eine

ganze rationale Funktion bedeutet. Alsdann heißen die Nullstellen von $G(z)$ die Verzweigungspunkte von $\sqrt{G(z)}$. Alsdann gilt wieder der

Satz: Bei einem Umlauf um eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten bleibt der Wert der Funktion ungeändert, bei einem Umlauf um eine ungerade Anzahl ändert sie ihr Zeichen.

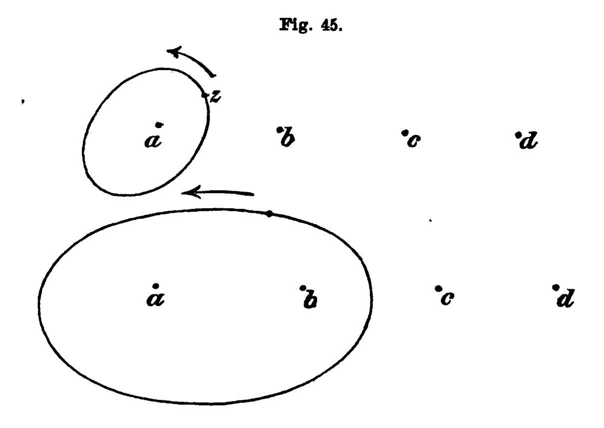
Der Beweis wird ganz analog geführt und möge dem Leser überlassen bleiben. Das Resultat im Einzelnen wollen wir an dem Beispiele von vier Verzweigungspunkten $a\, b\, c\, d$, also an der Funktion

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

erläutern.

Beschreiben wir einen Umlauf um $\mathfrak{U}$, der die übrigen Verzweigungspunkte ausschließt (Figur 45), so sind in dieser

Fig. 45.



Umgebung $\sqrt{z-b}$, $\sqrt{z-c}$, $\sqrt{z-d}$ und daher auch $\sqrt{(z-b)(z-c)(z-d)}$ eindeutig; $\sqrt{z-a}$ aber behält sein Zeichen oder wechselt es, jenachem a außerhalb oder innerhalb von $\mathfrak{W}$ liegt. Dieselbe Überlegung gilt für die Punkte b, c, d. Wir sehen also:

Der Umlauf um 0 Verzweigungspunkte erhält das Zeichen,
„ „ „ 1 „ ändert „ „
Der Umlauf um zwei Verzweigungspunkte erhält das Zeichen.

Denn wenn z beispielsweise einen Weg beschreibt, der a und b in seinem Inneren enthält, so ändert nach Nr. 628 die Funktion

$\sqrt{(z-a)(z-b)}$ ihr Zeichen nicht, und $\sqrt{(z-c)(z-d)}$ auch nicht. Also bleibt auch das Vorzeichen des Produktes erhalten. Analog können wir zeigen:

Ein Umlauf um 4 Verzweigungspunkte erhält das Zeichen.
Ein Umlauf um 3 Verzweigungspunkte ändert das Zeichen.

631. Die Funktion lz. Als letztes Beispiel behandeln wir die Funktion $w = lz$.

Setzen wir

$$x = \varrho \cos \omega, \qquad y = \varrho \sin \omega,$$

so wird (Nr. 357)

$$z = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega),$$

d. i. nach Nr. 373

$$z = \varrho e^{i\omega}.$$

Mithin folgt:

$$w = l(\varrho e^{i\omega}).$$

Es wird daher

$$w = l\varrho + \omega i. \tag{1}$$

Diese Gleichung dient dazu $w = lz = l(x + yi)$ in seinen reellen und imaginären Teil zu spalten; da

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}$$

ist, so folgt aus (1):

$$l(x + yi) = \frac{1}{2} l(x^2 + y^2) + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \cdot i \tag{2}$$

als gewünschte Gleichung.

Andererseits ergiebt sich aus (1) die Vieldeutigkeit von lz. Beschreibt man nämlich von z aus in positiver Richtung irgend einen einfachen, geschlossenen Weg, so ist aus w geworden:

$$\overline{w} = l\varrho + \omega i + 2\pi i = w + 2\pi i;$$

d. h.:

Ein positiver Umlauf um den Nullpunkt verwandelt lz in $lz + 2\pi i$.

Hätten wir k Umläufe im pos. Sinne gemacht, so wäre lz in $lz + 2k\pi i$ übergegangen, während bei ebenso vielen Umläufen in umgekehrter Richtung lz in $lz - 2k\pi i$ übergegangen wäre.

Bemerkung. Man beachte, daſs in dieser Nummer das Additionstheorem des Logarithmus $l(a \cdot b) = la + lb$ still-

schweigend auch für komplexe Zahlen als gültig angenommen ist. Die Berechtigung hierzu wird später erwiesen werden.

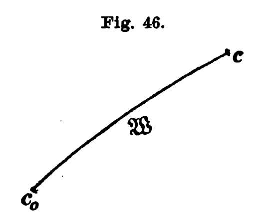
§ 3. Integrale komplexer Funktionen.

632. Definition des Integrales. Was ist unter dem Integrale:

$$\int_{c_0}^{c} f(z)\,dz$$

zu verstehen? Dies geht unmittelbar aus dem hervor, was wir in Nr. 615 über die Integrale von mehrgliedrigen Differentialen gesagt haben. Zunächst mufs man sich auf einen bestimmten *Weg* einigen, der die Punkte c_0 und c verbindet und längs dessen die Integration zu erstrecken ist. Die formale Rechnung ergiebt ferner zunächst für das Differential:

Fig. 46.



$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= (u + vi)\,(dx + dy \cdot i) \\ &= (u\,dx - v\,dy) + (v\,dx + u\,dy) \cdot i. \end{aligned}$$

Wir definieren daher:

Definition: Unter dem Integrale

$$\int_{\mathfrak{W}} f(z)\,dz$$

verstehen wir:

$$\int_{\mathfrak{W}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{W}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\mathfrak{W}} (v\,dx + u\,dy).$$

Diese Definition bleibt auch für den Fall bestehen, dafs der Weg $\mathfrak{W}$ ein geschlossener ist.

633. Folgerung. Diese Definition des Integrales läfst sich formell ganz in Übereinstimmung bringen mit derjenigen, welche wir in Nr. 406 vom Integral einer reellen Funktion gegeben haben.

Zerlegen wir den Weg $\mathfrak{W}$, durch welchen die Punkte z_0 und z verbunden sind (Fig. 47), in n Teile durch die Punkte

$z_1, z_2, \cdots z_{n-1}$ und ziehen die Sehnen $\overline{z_0 z_1}, \overline{z_1 z_2}, \cdots \overline{z_{n-1} z}$, die zusammen einen Weg $\mathfrak{W}_n$ definieren, der von z_0 nach z_1 führt. Für $n = \infty$ fällt $\mathfrak{W}_n$ mit $\mathfrak{W}$ zusammen und es wird daher nach Nr. 615 das Integral über $\mathfrak{W}$ der Grenzwert der Summe

$$f(z_0)\cdot(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \cdots + f(z_{n-1})(z - z_{n-1}) = Sf(z)\Delta z.$$

Fig. 47.

Dies ist aber die Definition der Nr. 406.

Um hiervon eine Anwendung zu geben beweisen wir den

Satz: Längs des Weges $\mathfrak{W}$ sei $f(z)$ stetig und $|f(z)| < M$. Die Länge des Weges $\mathfrak{W}$ sei s, alsdann ist:

$$\left|\int_{\mathfrak{W}} f(z)\,dz\right| \leqq M \cdot s.$$

In der That, nach Nr. 358 ist der absolute Betrag der Summe nicht grölser als die Summe der absoluten Beträge; daher wird unsere obige Summe

$$|Sf(z)\Delta z| \leqq S|f(z)| \cdot |\Delta z| \leqq M \cdot S|\Delta z|.$$

An der Grenze geht aber die linke Seite in das Integral, und

$$S|\Delta z| = |z_1 - z_0| + \cdots + |z - z_{n-1}|$$

in die Länge s des Weges $\mathfrak{W}$ über, also wird

$$\left|\int_{\mathfrak{W}} f(z)\,dz\right| \leqq Ms,$$

wie behauptet war.

634. Rechnungsregeln für Integrale. Aus der Definition des Integrales einer komplexen Funktion ergeben sich sofort nach Nr. 615 die Rechnungsregeln, die mit denen für reelle Funktionen übereinstimmen. Aus den Sätzen der Nr. 410 folgt sofort:

Fig. 48.

Satz I. $\int_a^b f(z)dz + \int_b^c f(z)dz = \int_a^c f(z)dz,$

wobei immer die einmal gewählten Wege festzuhalten sind.

Satz II. $\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz.$

Ferner ergiebt sich leicht der

Satz III. $F(z) = \int_c^z f(z)\,dz$

ist eine komplexe Funktion der oberen Grenze z, deren Ableitung den Integranden ergiebt:

$$F'(z) = f(z).$$

In der That, setzen wir $c = a + bi$, so wird:

$$F(z) = U + Vi = \int_{ab}^{xy} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{ab}^{xy} (v\,dx + u\,dy).$$

Nach Nr. 611 wird aber:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} i = u + v \cdot i = f(z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} i = -v + u \cdot i = i \cdot f(z).$$

Daher wird

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = v = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Also ist $F(z) = U + Vi$ eine komplexe Funktion. Ihre Ableitung ist aber

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} i = f(z),$$

wie behauptet.

635. Fundamentalsatz. *Es sei $f'(z)$ in C eindeutig und stetig, alsdann ist*

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem analogen in Nr. 617. In der That, nach der Definition ist

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\mathfrak{C}} (v\,dx + u\,dy).$$

Nach den Differentialgleichungen für u und v sind aber $u\,dx - v\,dy$ und $v\,dx + u\,dy$ vollständige Differentiale, daher wird auf der rechten Seite sowohl der reelle als der imaginäre Teil null, also auch

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0.$$

Aus diesem Satze folgt analog wie in Nr. 617 die Unabhängigkeit des Integrales vom Wege, d. h. es ist

$$\int_{a_{\mathfrak{W}}}^{b} f(z)\,dz = \int_{a_{\mathfrak{W}'}}^{b} f(z)\,dz,$$

sobald $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ ein Gebiet einschliefsen, innerhalb dessen $f(z)$ eindeutig und stetig ist.

636. Der Periodicitätsmodul des Logarithmus. Der soeben bewiesene Satz erfordert, dafs $f'(z)$ in C eindeutig und stetig ist. Wir werden zeigen, dafs $\int f(z)\,dz$ keineswegs null zu sein braucht, wenn auch nur eine dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$\int_1^z \frac{dz}{z},$$

die für reelles z mit dem Logarithmus identisch ist. Hieraus folgt, dafs dies auch für komplexe z der Fall ist. (Vgl. Nr. 645 zu Anfang.)

Dieses Integral würde eine eindeutige Funktion von z sein, wenn der Integrand $\frac{1}{z}$ überall eindeutig und stetig wäre; denn in diesem Falle würden nach der vorigen Nummer zwei verschiedene Wege zwischen 1 und z immer dasselbe Integrationsresultat geben.

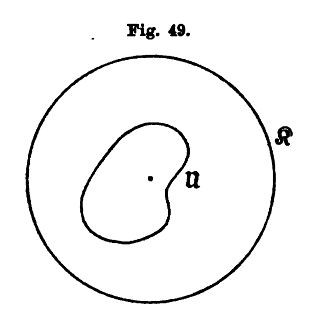
Nun ist $\frac{1}{z}$ zwar immer eindeutig, aber unstetig für $z = 0$. Bilden wir also das Integral über einen Umlauf $\mathfrak{U}$

$$\int_{\mathfrak{U}} \frac{dz}{z},$$

so wissen wir nur dann, dafs dieses null ist, wenn $\mathfrak{U}$ den Nullpunkt nicht enthält.

Dagegen ist es thatsächlich von null verschieden, wenn $\mathfrak{U}$ den Nullpunkt einschliefst.

Fig. 49.



Um dies zu erkennen, beachten wir zunächst, dafs in diesem Falle, wie aus Nr. 635 folgt, unser geschlossener Weg $\mathfrak{U}$ durch einen Kreis $\mathfrak{K}$ um den Nullpunkt ersetzt werden kann (vergl. Fig. 49). Es sei ϱ der Radius dieses Kreises.

Setzen wir

$$z = \varrho e^{\omega i},$$

so durchlaufen wir alle Punkte des Kreises in positivem Sinne, wenn wir ϱ konstant lassen, während ω von 0 bis 2π variiert. Es wird also:

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\varrho e^{i\omega})}{\varrho e^{i\omega}}.$$

Nun wird aber

$$d(\varrho e^{\omega i}) = \varrho e^{\omega i} i \, d\omega,$$

und daher folgt

$$\int \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi i.$$

Unser Integral hat also den Wert $2i\pi$.

Hieraus ergiebt sich, analog wie in Nr. 631, dafs lz um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ vieldeutig ist. Ist also w ein Wert von lz an irgend einer Stelle z, so sind auch alle Werte der Form

$$w \pm 2k\pi i$$

und nur diese Werte von lz an der betreffenden Stelle. Dabei bedeutet k eine ganze Zahl (vergl. Nr. 631).

Man drückt dies aus, indem man sagt:

Die Funktion lz *ist vieldeutig um beliebige ganzzahlige Multipla von* $2\pi i$, *die man additiv hinzufügen kann.*

Hat eine Funktion $f(z)$ die Eigenschaft, dafs sie aufser dem Werte w auch alle Werte der Form $w + kA$ annehmen

kann, wo k irgend eine reelle ganze Zahl, A eine komplexe Konstante bedeutet, so nennt man A einen *Periodicitätsmodul* der Funktion $f(z)$. Wir werden demnach sagen:

Der Logarithmus besitzt den Periodicitätsmodul $2\pi i$.

637. Der Periodicitätsmodul des Arcus sinus. Wir betrachten nun das Integral

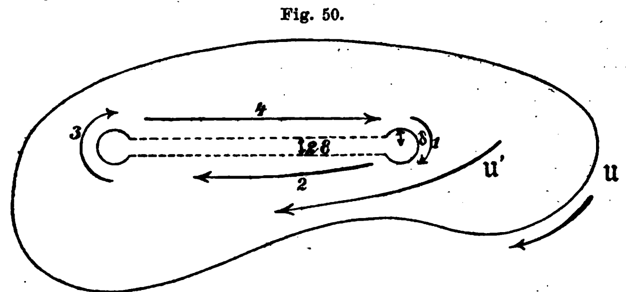
$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

das (nach Nr. 412) für reelle und, wie wir sehen werden, auch für komplexe z mit dem Arcus sinus identisch ist. Um seine Vieldeutigkeit zu untersuchen, bilden wir

$$\int_{\mathfrak{U}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

und nehmen als Integrationsweg einen Umlauf, der die Verzweigungspunkte $z = -1$ und $z = +1$ des Integranden umschliefst und der in negativem Sinn durchlaufen wird (vergl. Figur 50).

Fig. 50.



Um den Wert des Integrales zu ermitteln, wollen wir den Weg $\mathfrak{U}$ ersetzen durch den in der Figur angedeuteten. Wir legen um die Punkte $+1$ und -1 Kreise mit den Radien δ und ziehen auf beiden Seiten der reellen Axe Parallelen zu derselben im Abstand ε.

Von diesen Kurven nehmen wir nun diejenigen Stücke, welche zusammen einen Umlauf um die Punkte $+1$ und -1 ergeben. Dieser sei mit $\mathfrak{U}'$ bezeichnet.

Dann ist also

$$\int_{\mathfrak{U}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{U}'} f(z)\,dz$$

und es kommt darauf an

$$\int_{\mathfrak{U}'} f(z)\,dz$$

auszuwerten.

Das geschieht, indem wir das Integral in vier Teile zerlegen, wie die Figur zeigt.

Dadurch bekommen wir

$$\int_{\mathfrak{U}'} = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 .$$

Dabei bedeuten 1 und 3 die Wege längs der Kreise, 2 und 4 (in der Figur punktiert) die längs der Parallelen, wie sie in der Figur gezeichnet sind.

Der Wert des Integrales $\int_{\mathfrak{U}'}$ ist unabhängig von δ und ε; wir bestimmen ihn daher, indem wir δ und ε, und zwar erst ε, dann δ null werden lassen.

Alsdann verschwinden die Integrale 1 und 3. Wir können dies z. B. am Integral 1 zeigen, indem wir Polarkoordinaten einführen mit dem Punkt $z = 1$ als Pol und der positiven Richtung der x-Axe als Anfangsrichtung.

Wir bekommen dann

$$z = 1 + \delta e^{i\varphi}$$

und es wird dann, wenn wir $\varepsilon = 0$ werden lassen,

$$\int_1 f(z)\,dz = \int_{+\pi}^{-\pi} \frac{\delta e^{i\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{\delta(2 + \delta e^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}} .$$

Dieses Integral verschwindet aber wegen des in ihm enthaltenen Faktors $\delta^{\frac{1}{2}}$ für $\delta = 0$, wie behauptet war.

Ganz analog läſst sich dies für das Integral 3 zeigen.

Es fragt sich nun, was aus den Integralen über 2 und 4 wird. Lassen wir $\varepsilon = 0$ werden, so wird das Integral 2:

$$\int_4 = \int_{-1+\delta}^{+1-\delta} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Das Integral über 4 geht umgekehrt von $-1+\delta$ bis $1-\delta$. Im Integral über 4 ist aber das entgegengesetzte Vorzeichen von $\sqrt{1-z^2}$ zu nehmen als im Integral über 2. Denn im Punkte $-1+\delta$, der gleichzeitig Endpunkt von 2 und Anfangspunkt von 4 ist, ist beidesmal verschiedenes Vorzeichen zu nehmen, weil dazwischen der Umlauf 3 liegt, der den Verzweigungspunkt -1 einschliefst.

Also bekommen wir:

$$\int_2 = -\int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

und

$$\int_2 + \int_4 = +2\int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\int_0^{1-\delta} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

und für $\delta = 0$ kommt der Wert

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Daher wird auch

$$\int_{\mathfrak{U}'} = 4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Das letzte Integral ist reell und hat den Wert $\frac{\pi}{2}$, (nach Nr. 412), also haben wir:

$$\int_{\mathfrak{U}} = \int_{\mathfrak{U}'} = 2\pi.$$

Der Periodicitätsmodul des Arcus sinus ist also 2π; d. h. die Funktion ist vieldeutig um beliebige ganzzahlige Multipla von 2π.

638. Die Periodicitätsmoduln des elliptischen Normalintegrales erster Gattung. Das elliptische Normalintegral erster Gattung war (Nr. 446)

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Für $k = 0$ fällt es mit dem Arcus Sinus zusammen, der den reellen $P.$-Modul 2π hat, für $k = 1$ mit dem Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+z}{1-z},$$

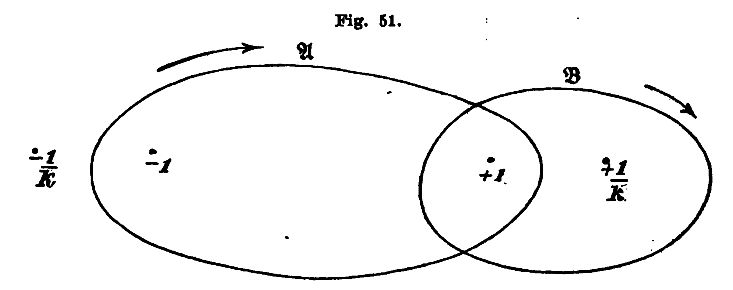
das den imaginären $P.$-Modul $2\pi i$ hat. Wir werden sehen, daſs unser Integral für allgemeines k sowohl einen reellen als einen imaginären $P.$-Modul hat.

Wir haben hier den 4 Nullstellen des Radikanden entsprechend 4 Verzweigungspunkte, nämlich

$$-1, \quad +1, \quad -\frac{1}{k}, \quad +\frac{1}{k}.$$

Diese liegen, wenn k entsprechend Nr. 446 reell, positiv und kleiner als l angenommen wird, auf der reellen Axe, so wie nebenstehende Figur zeigt.

Fig. 51.



Wir haben eine ganze Reihe von Umläufen um 2 Verzweigungspunkte, die uns analog wie der eine beim Arcus Sinus zur Definition von $P.$-Moduln dienen können.

Ein erster Periodicitätsmodul soll uns definiert werden durch das Integral über einen Umlauf $\mathfrak{A}$ um die Punkte -1 und $+1$, ein zweiter durch das Integral über einen Umlauf $\mathfrak{B}$ um $+1$ und $+\frac{1}{k}$. Wir haben dann:

$$a = \int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$b = \int_{\mathfrak{B}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Beide Umläufe sollen wieder, wie in der Figur angedeutet, im negativen Sinne ausgeführt werden.

Da der Umlauf $\mathfrak{A}$ die Punkte -1 und $+1$ umschliefst, erhalten wir wie beim Arcus Sinus

$$a = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und analog wird

$$b = 2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Das erste Integral vereinfacht sich, da der Integrand im Intervalle -1 bis 0 dieselben Werte annimmt wie im Intervalle 0 bis 1, auf:

$$a = 4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Das Integral rechter Hand ist reell und nach den Methoden der Nr. 447 für jedes k leicht zu berechnen.

Bezeichnen wir seinen Wert mit K, so wird

$$a = 4K.$$

Nach Legendre nennt man K *das vollständige Integral erster Gattung.*

Das zweite Integral läfst sich schreiben:

$$b = 2i\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

wobei die Wurzel im Integrationsintervall immer reell bleibt. Es hat daher einen rein imaginären Wert. Wir führen das Integral auf das vorige zurück durch die Substitution:

$$k'^2 = 1 - k^2, \qquad z = \frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2x^2}.$$

Man erhält dann durch einfache Ausrechnung:

$$\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Dieses Integral geht aus K hervor, wenn wir k durch k' ersetzen. Setzen wir daher:

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

so wird

$$b = 2K'i,$$

und wir erkennen:

Die beiden von uns definierten Periodicitätsmoduln haben die Werte $4K$ und $2iK'$; dabei sind K und K' reell.

Das elliptische Normalintegral erster Gattung ist daher vieldeutig um beliebige ganzzahlige Vielfache von $4K$ und $2K'i$.

Ist w ein Wert des Integrales, der einer bestimmten Stelle z entspricht, so geht dieser, wenn man nach m-maligem Umkreisen von -1 und $+1$ und n-maligem von 1 und $\frac{1}{k}$ nach der Anfangsstelle zurückkehrt, über in:

$$\bar{w} = w + 4mK + 2nK'i.$$

§ 4. Entwickelung der komplexen Funktionen in Potenzreihen.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaften der Integrale komplexer Funktionen geben uns die Mittel an die Hand, um die in Nr. 622 bereits erwähnte Identität der komplexen Funktionen mit den anscheinend viel spezielleren analytischen Funktionen zu erweisen.

Dazu dient uns:

639. Der Cauchysche Fundamentalsatz. *Im Inneren U des Umlaufes $\mathfrak{U}$ erfülle $f(z)$ die*

Forderung $\mathfrak{K}$. $f(z)$ sei eindeutig und stetig bis zur 2ten Ableitung. Alsdann gilt für jeden Punkt z innerhalb U die Gleichung:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{U}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

bei welcher die Integration im positiven Sinne zu erstrecken ist.

Zum Beweise denken wir uns eine bestimmte Stelle z im Inneren von $\mathfrak{U}$ herausgegriffen und betrachten die Funktion von ζ:

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}. \tag{1}$$

Diese ist stetig jedenfalls für alle ζ des Gebietes $\mathfrak{U}$, wenn man die Stelle $\zeta = z$ ausschließt. Sie bedeutet den Differenzenquotienten der Funktion $f(z)$ für die beiden Punkte ζ und z. Läßt man nun ζ in z hineinrücken, so geht dieser in den Differentialquotienten von $f(z)$ an der Stelle z, also in $f'(z)$ über. Andererseits wird dabei aus $F(\zeta)$ $F(z)$, also wird an der Stelle $\zeta = z$:

$$F(z) = f'(z).$$

Also ist $F(\zeta)$ im ganzen Gebiete U stetig. Das Gleiche gilt aber auch noch von $F'(\zeta)$. Denn für $\zeta = z$ folgt aus der letzten Gleichung:

$$F'(z) = f''(z),$$

und dieses ändert sich stetig mit z, da die Forderung $\mathfrak{K}$ erfüllt sein soll. Für $\zeta = z$ ergiebt aber die Differentiation der Gleichung (1) für $F'(\zeta)$ ebenfalls eine stetige Funktion von ζ.

Unsere Funktion $F(\zeta)$ erfüllt daher für alle ζ des Gebietes U die Forderung $\mathfrak{K}$ und mithin gilt für sie der Fundamentalsatz der Nr. 635:

$$\int_{\mathfrak{U}} F(\zeta)\, d\zeta = 0;$$

d. h. nach Gleichung (1)

$$\int_{\mathfrak{U}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{\mathfrak{U}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Nach Nr. 636 ist aber das zweite Integral gleich $2\pi i$, und wir erhalten daher:

$$\int_{\mathfrak{U}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i \cdot f(z) = 0$$

oder

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{U}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{2}$$

wie behauptet war.

640. Anwendung auf die Berechnung von bestimmten Integralen. Ehe wir die theoretische Bedeutung des vorigen Satzes ausnutzen, wollen wir an einem Beispiele zeigen, daß er auch zur Auswertung reeller bestimmter Integrale benutzt werden kann.

1. Es werde

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

gesetzt; diese Funktion erfüllt die Forderung $\mathfrak{R}$ für alle Werte von z, deren Betrag kleiner als 1 ist. Aus der Gleichung (2) der vorigen Nummer folgt also, wenn man $z = 0$ und für $\mathfrak{U}$ einen Kreis mit dem Radius $R < 1$ um den Nullpunkt nimmt:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - Re^{i\omega}} = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - R\cos\omega) + iR\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2}\, d\omega,$$

oder, wenn man die reellen und imaginären Teile trennt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - R\cos\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2}\, d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2}\, d\omega = 0.$$

Es ist zu bemerken, daſs diese letzte Gleichung evident ist; denn die Elemente des Integrales, welche zu einem Werte ω und dem dazu komplementären $2\pi - \omega$ gehören, sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Die erste Gleichung gilt nicht mehr, wenn $R > 1$ ist; in diesem Falle ist der Wert des Integrales gleich 0. Denn es wird:

$$\frac{1 - R\cos\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2} + \frac{1 - \frac{1}{R}\cos\omega}{1 - \frac{2}{R}\cos\omega + \frac{1}{R^2}} = 1.$$

Multipliziert man diese Identität mit $d\omega$ und integriert alsdann von 0 bis 2π, so wird das Integral des ersten Quotienten gleich 2π, wenn $R < 1$ ist; folglich ist das zweite gleich null, und man erhält

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{R}\cos\omega}{1 - \frac{2}{R}\cos\omega + \frac{1}{R^2}}\, d\omega = 0.$$

Für den Fall $R = 1$ wird das Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos\omega}{2 - 2\cos\omega}\, d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2} = \pi.$$

2. Es sei $f(z) = e^z$; diese Funktion erfüllt die Forderung $\mathfrak{K}$; setzt man also $z = 0$ und nimmt als Integrationsbahn einen Kreis um $z = 0$ mit dem Radius m, so ergiebt die Gleichung (2) der vorigen Nummer:

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega + im\sin\omega}\, d\omega = 2\pi,$$

also

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega} \cos(m\sin\omega)\, d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega} \sin(m\sin\omega)\, d\omega = 0.$$

Das Element des ersten Integrales bekommt denselbeu Wert, wenn man die in Bezug auf 2π komplementären Werte von ω einsetzt; daraus folgt, dafs

$$\int_0^{\pi} e^{m\cos\omega} \cos(m\sin\omega)\, d\omega = \pi$$

ist, eine Formel, die Poisson auf anderm Wege im 19. Hefte des Journal de l'École Polytechnique abgeleitet hat.

3. Wir setzen noch

$$f(z) = l(1 + z) = l(1 + \varrho e^{i\omega});$$

ω variiere von $-\pi$ bis $+\pi$, ϱ sei kleiner als 1. Setzt man

$$1 + z = re^{i\psi},$$

so ist

$$1 + \varrho\cos\omega = r\cos\psi, \quad \varrho\sin\omega = r\sin\psi,$$

also:

$$r = \sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}, \quad \psi = \operatorname{arc\,tang} \frac{\varrho\sin\omega}{1 + \varrho\cos\omega}.$$

Die Funktion $f(z)$ erfüllt $\mathfrak{K}$ solange als z kleiner als 1 ist (Nr. 375). Es ist $\cos\psi$ immer positiv, und der Winkel ψ, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ variiert, ist durch seine

Tangente vollkommen bestimmt. Nimmt man nun $R < 1$ an, so giebt die Gleichung (5):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (lr + i\psi)\, d\omega = 0,$$

d. h.:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} l(1 + 2R \cos \omega + R^2)\, d\omega = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{R \sin \omega}{1 + R \cos \omega}\, d\omega = 0.$$

641. Reihenentwickelung der komplexen Funktionen. Wir gehen jetzt in der theoretischen Entwickelung weiter und wollen als unmittelbare Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Nr. 639 das Theorem ableiten:

Theorem. $f(z)$ *erfülle die Forderung* $\mathfrak{K}$ *für alle* z, *die der Ungleichheit* $|z - z_0| \leqq \varrho$ *genügen. Alsdann läſst sich* $f(z)$ *nach dem Taylorschen Satze in eine Potenzreihe entwickeln:*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots,$$

die für alle Punkte innerhalb des um z_0 *mit dem Radius* ϱ *beschriebenen Kreises konvergiert.*

In der That nach Nr. 639 ist:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{K}$ die Peripherie des im Theorem genannten Kreises, z einen Punkt im Inneren dieses Kreises.

Wir entwickeln den Integranden nach Potenzen von $z - z_0$. Zunächst ist:

$$(2) \; \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} + (z - z_0) \cdot \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} + (z - z_0)^2 \cdot \frac{1}{(\zeta - z_0)^3} + \cdots.$$

Nach Nr. 376 konvergiert die Entwickelung für $(1 + \mathfrak{t})^m$ gleichmäſsig in einem Kreise der $\mathfrak{t}$-Ebene, dessen Mittelpunkt

$t = 0$, dessen Radius kleiner als 1 ist. Setzen wir $-t = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ und $m = -1$, so erkennen wir, daſs die Entwickelung von

$$\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1}$$

gleichmäſsig konvergiert in einem Kreise, dessen Mittelpunkt $z = z_0$, dessen Radius $\varrho = |\zeta - z_0|$ ist. Multiplizieren wir daher (2) noch mit $f(\zeta)$, so erhalten wir für den Integranden von (1) die Entwickelung

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} + (z - z_0) \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} + (z - z_0)^2 \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3} + \cdots,$$

die gleichmäſsig für alle ζ der Peripherie $\mathfrak{K}$ konvergiert. Wir können also nach Nr. 426 gliedweise integrieren und erhalten:

$$(3)\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \cdots.$$

Die Reihe konvergiert für alle z innerhalb $\mathfrak{K}$.

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(4)\quad \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta, \\ c_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta, \\ c_2 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3}\, d\zeta, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Hiermit ist zunächst bewiesen:

$f(z)$ ist eine analytische Funktion und innerhalb $\mathfrak{K}$ nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelbar.

Nach Nr. 372 sind aber die Koeffizienten einer Potenzreihe durch den Taylorschen Satz gegeben. Es muſs also sein:

$$c_0 = f(z_0),$$
$$c_1 = \frac{f'(z_0)}{1!},$$
$$c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

In der That ergiebt die erste der Gleichungen (4) nach Nr. 639 für c_0 den Wert:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = f(z_0).$$

Durch Differentiation nach z_0 folgt hieraus der Wert für c_1:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta = f'(z_0).$$

Allgemein wird:

$$(5) \qquad \frac{1\cdot 2\cdots n}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = f^{(n)}(z_0)$$

und daher:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Wir schalten wieder eine Anwendung des theoretischen Resultates auf die Auswertung reeller bestimmter Integrale ein.

642. Anwendung auf bestimmte Integrale. Wenn zwei Funktionen einander gleich sind für alle reellen Werte der Variabelen (oder auch nur für alle Werte der Variabelen innerhalb eines bestimmten Intervalles), und beide Funktionen sind in konvergente Reihen entwickelbar, geordnet nach ganzen wachsenden Potenzen dieser Variabelen, so sind die Koeffizienten gleicher Potenzen in beiden Entwickelungen einander gleich (Nr. 371). Bleiben also die beiden Reihen konvergent, wenn man die Variabele komplex annimmt, und dieses ist sicher der Fall, solange der Betrag des komplexen Wertes kleiner ist als der gröſste Betrag, bei welchem die reelle Reihe konvergiert, so besteht die Gleichheit zwischen den beiden Funktionen notwendig fort.

Auf Grund dieser Überlegung kann man die Werte von einigen neuen bestimmten Integralen ableiten.

Kehren wir z. B. zur Gleichung (14) der Nr. 491 zurück. Man sieht leicht ein, daſs sich die beiden Seiten dieser Gleichung in konvergente Reihen, welche nach ganzen Potenzen von n fortschreiten, entwickeln lassen, und daſs diese Konvergenz nicht gestört wird, wenn man für n den Wert ni einführt. Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2\zeta^2}\cos 2n\zeta\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\,e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Man kann das Integral auch mit der unteren Grenze null beginnen, wenn man die rechte Seite mit 2 dividiert, und erhält so:

$$\int_0^\infty e^{-m^2\zeta^2}\cos 2n\zeta\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Ein anderes Beispiel liefert die Gleichung (12) derselben Nummer, in welcher a eine positive Gröfse bedeutet. Ersetzt man hier $\sqrt{a}$ durch $m(1+\alpha)$, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+\alpha)^2\zeta^2 m^2}\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\alpha)}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung lassen sich in konvergente Potenzreihen in Bezug auf α entwickeln, bei allen reellen Werten von α zwischen -1 und $+1$. Es bleiben daher diese Reihen auch konvergent, wenn α einen komplexen Wert bezeichnet, dessen Modul kleiner als 1 ist. Setzt man nun $\alpha = \varrho i$, wobei ϱ reell und kleiner als 1 ist, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+2i\varrho-\varrho^2)m^2\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+i\varrho)} = \frac{1-i\varrho}{m(1+\varrho^2)}\sqrt{\pi}.$$

Setzt man die reellen und imaginären Bestandteile einzeln einander gleich, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\varrho^2)m^2\zeta^2}\cos(2\varrho m^2\zeta^2)\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\varrho^2)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\varrho^2)m^2\zeta^2}\sin(2\varrho m^2\zeta^2)\,d\zeta = \frac{\varrho\sqrt{\pi}}{m(1+\varrho^2)},$$

oder, wenn man $(1-\varrho^2)m^2 = \mu$, $2\varrho m^2 = \nu$ einführt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu\zeta^2}\cos(\nu\zeta^2)\,d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu^2+\nu^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu\zeta^2}\sin(\nu\zeta^2)\,d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu^2+\nu^2}}.$$

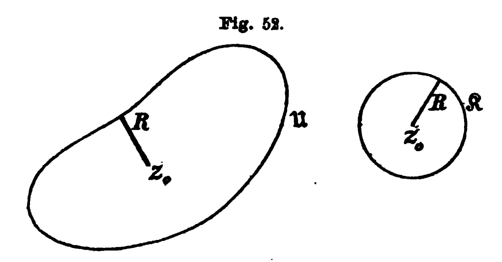
Diese Gleichungen setzen voraus, dafs $\mu > 0$ ist.

643. Cauchys calcul des limites. Aus den Formeln in Nr. 641 lassen sich sehr bemerkenswerte obere Grenzen für den absoluten Betrag einer Funktion und ihrer Ableitungen herleiten, die Cauchy seinem „calcul des limites" zu Grunde gelegt hat. Sie werden auch für uns sehr wesentlich werden, nämlich bei dem Existenztheorem der Differentialgleichungen (Band III).

$f(z)$ erfülle in U die Forderung $\mathfrak{R}$. Der größte Wert von $|f(z)|$ auf $\mathfrak{U}$ übersteige nicht M, der kleinste Wert von $|z - z_0|$ auf $\mathfrak{U}$ sei R (vergl. Fig. 52). Die Länge des Umlaufes $\mathfrak{U}$ sei s. Nach Nr. 639 ist:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{U}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1}$$

Fig. 52.



Nun ist aber

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leqq \frac{M}{R}$$

und daher (Nr. 633) das Integral absolut kleiner $\frac{Ms}{R}$ und mithin:

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Ms}{R}.$$

Ist im Besonderen $\mathfrak{U}$ ein Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Radius R, so wird $s = 2\pi R$ und daher:

$$|f(z)| \leqq M, \tag{2}$$

d. h.:

Satz I. $f(z)$ nimmt im Inneren eines Kreises nur Werte an, deren absoluter Betrag die Werte von $|f(z)|$ auf der Peripherie nicht übersteigt.

Dies Resultat ist bemerkenswert.

Aus der Gleichung

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{U}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

folgt ganz auf dieselbe Weise wie oben:

$$|f^{(n)}(z)| \leqq \frac{n!\, Ms}{2\pi R^{n+1}},$$

also für $\mathfrak{U} = \mathfrak{K}$:

$$|f^{(n)}(z)| \leqq \frac{n!\, M}{R^n} \tag{3}$$

eine Gleichung, die für $n = 0$ in (2) übergeht. Im Besonderen wird für $z = z_0$

$$|f^{(n)}(z)|_0 \leqq \frac{n!\, M}{R^n}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet der Index 0 auf der linken Seite, daſs nach der Differentiation $z = z_0$ gesetzt werden soll.

Bilden wir andererseits die Funktion:

$$\varphi(z) = \frac{M}{1 - \frac{z - z_0}{R}},$$

so wird:

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{n!\, M}{R^n \cdot \left(1 - \frac{z - z_0}{R}\right)^{n+1}}$$

und daher

$$\varphi^{(n)}(z_0) = \frac{n!\, M}{R^n}.$$

Wir können daher (4) so schreiben:

$$|f^{(n)}(z)|_0 \leqq \varphi^{(n)}(z)_0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5}$$

das heiſst aber:

Satz II. Innerhalb eines um z_0 mit dem Radius R beschriebenen Kreises erfülle $f(z)$ die Forderung $\mathfrak{K}$. Der gröſste Wert von $f(z)$ auf der Peripherie des Kreises sei M. Setzt man nun:

$$\varphi(z) = \frac{M}{1 - \frac{z - z_0}{R}},$$

so ist im Punkte $z = z_0$ der absolute Wert irgend einer Ableitung von $f(z)$ nicht gröſser als der der entsprechenden Ableitung von $\varphi(z)$.

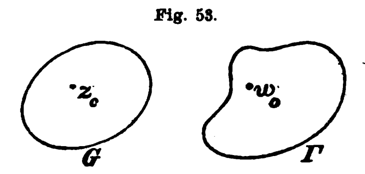
Dieser Satz ist von fundamentaler Bedeutung in der Theorie der Differentialgleichungen.

644. Die inverse Funktion. Es sei w eine komplexe Funktion von z:

$$w = f(z).$$

Für $z = z_0$ werde $w = w_0$. Einem bestimmten Gebiet G der z-Ebene um z_0 entspricht dann ein Gebiet Γ der w-Ebene um w_0, so daſs auch umgekehrt zu jedem Wert w des Gebietes Γ ein z in G gehört. Zu einem Wert w des Gebietes Γ können übrigens eventuell auch mehrere Werte z innerhalb G gehören.

Fig. 53.



Es fragt sich, ob umgekehrt z als komplexe Funktion von w:

$$z = \varphi(w)$$

betrachtet werden kann. Ist dies der Fall, so nennen wir φ die zu f *inverse Funktion.*

Eine Antwort auf unsere Frage giebt der:

Satz I. Um $z = z_0$ grenze man ein Gebiet G ab, innerhalb dessen $w = f(z)$ der Forderung $\mathfrak{R}$ genügt und $f'(z)$ nicht null ist. Alsdann entspricht dem Gebiete G der z-Ebene ein Gebiet Γ der w-Ebene, das den Punkt w_0 enthält, so, daſs jedem Werte z in G ein und nur ein Wert w in Γ und umgekehrt jedem Werte w in Γ ein und nur ein Wert z in G entspricht.

Innerhalb Γ ist z eine komplexe Funktion von w:

$$z = \varphi(w),$$

die der Forderung $\mathfrak{R}$ genügt.

Zum Beweise betrachten wir den Differentialquotienten:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z).$$

Alsdann ist umgekehrt:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)}. \tag{2}$$

Giebt es also eine komplexe Funktion z von w, so kann diese definiert werden als die Lösung der Differentialgleichung (2). Hier haben wir überdies noch diejenige Lösung herauszugreifen, die für $w = w_1$ den Wert w_0 annimmt.

Unter den gemachten Voraussetzungen genügt aber innerhalb G die rechte Seite der Differentialgleichung der Forderung $\mathfrak{R}$. Aus dem Existenztheorem über Differentialgleichungen, das wir

im 3. Bande beweisen, folgt daher, daſs innerhalb Γ eine und nur eine Lösung $z = \varphi(w)$ von (2) existiert, die für $w = w_0$ den Wert z_0 annimmt und in Γ die Forderung J erfüllt. Diese definiert die zu f inverse Funktion φ.

Da nun f in G die Forderung $\mathfrak{K}$ erfüllt, so gehört zu jedem Werte z in G ein und nur ein Wert w in Γ und da in Γ φ die Forderung $\mathfrak{K}$ erfüllt, so gehört auch zu jedem w in Γ ein und nur ein z in G.

Hiermit ist Satz I bewiesen.

Da sowohl f als φ die Forderung $\mathfrak{K}$ erfüllen, lassen sie nach Nr. 641 sich nach Potenzen von $z - z_0$ bezw. $w - w_0$ entwickeln. Zu jeder Potenzreihenentwickelung

$$(3)\quad w - w_0 = f(z) - w_0 = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

gehört daher, so lange $f'(z)$ nicht null ist, umgekehrt eine Reihenentwickelung von $z - z_0$ nach Potenzen von $w - w_0$:

$$(4)\quad z - z_0 = \varphi(w) - z_0 = e_1(w - w_0) + e_2(w - w_0)^2 + \cdots.$$

Man beachte, daſs die Voraussetzung $f'(z) \neq 0$ in G im Besonderen $f'(z_0) \neq 0$, d. h. $c_1 \neq 0$ nach sich zieht.

Besteht umgekehrt die Reihenentwickelung (3) und ist $c_1 \neq 0$, so ist $f'(z_0) \neq 0$ und daher auch in einem hinreichend kleinen Gebiete um z_0 auch $f'(z) \neq 0$. (Nr. 370.) Mithin kann ich um z_0 ein Gebiet G abgrenzen, welches den Voraussetzungen des Satzes I entspricht.

Nur eine andere Ausdrucksweise des Satzes I ist daher der:

Satz II. Gegeben sei die in einem gewissen Kreise um z_0 konvergente Reihenentwickelung

$$(3)\qquad w - w_0 = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

und es sei $c_1 \neq 0$. Alsdann gilt umgekehrt die Entwickelung:

$$(4)\qquad z - z_0 = e_1(w - w_0) + e_2(w - w_0)^2 + \cdots,$$

wo

$$e_1 = \frac{1}{c_1} \neq 0.$$

Um den Konvergenzbereich dieser Reihe zu finden, suche man die Stellen, in welchen die durch (3) definierte Funktion $w = f(z)$ der Forderung $\mathfrak{K}$ nicht genügt und die, für welche $f'(z) = 0$ ist und berechne die zu allen diesen z gehörenden Werte w. Ist ϱ

der kürzeste der Abstände dieser Punkte w vom Punkte w_0, so hat der Konvergenzkreis der Entwickelung (4) *den Radius* ϱ.

645. Die Funktionen lz, arc tg z, arc sin z. Um den Begriff der inversen Funktion anzuwenden, wollen wir zunächst zeigen, daſs e^z und lz auch für komplexe z inverse Funktionen sind.

Setzen wir

$$w = e^z,$$

so wird für $z = 0$, $w = 1$ und es besteht auch für komplexe z die Differentialgleichung:

$$\frac{dw}{dz} = w,$$

wie man aus der Reihenentwickelung der Nr. 373 leicht nachweist. Die inverse Funktion ist also diejenige Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{w},$$

welche für $w = 1$ den Wert 0 annimmt.

Für reelle w ist die Lösung der Logarithmus lw. Für ihn wurde in Nr. 120 die Reihe gefunden:

$$lw = \frac{w-1}{1} - \frac{(w-1)^2}{2} + \cdots, \quad \text{wobei} \quad |w-1| < 1.$$

Diese Reihe genügt also für reelle w, also auch für komplexe w der Differentialgleichung (1). Sie definiert nach Nr. 375 auch für komplexe w den Logarithmus, also ist der in Nr. 375 definierte lw die inverse Funktion zu $w = e^z$. Andererseits folgt aus (1) für ihn die Integraldarstellung:

$$z = lw = \int_1^w \frac{dw}{w}.$$

Hiermit ist auch die Identität des in Nr. 636 behandelten Integrales mit dem Logarithmus nachgewiesen.

In Nr. 373 wurde ferner gezeigt, daſs das Additionstheorem

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

auch für komplexe a und b gilt. Also besteht auch für die inverse Funktion, den Logarithmus, die Gleichung:

$$l(a \cdot b) = la + lb$$

bei komplexen a und b. Diese Thatsache wurde bereits in Nr. 631 benutzt.

Die inversen Funktionen zu

$$w = \sin z \quad \text{und} \quad w = \operatorname{tg} z$$

sind analog zu definieren.

$$z = \operatorname{arc}\sin w$$

ist dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}},$$

welches für $w = 0$ bei positivem Zeichen der Wurzel den Wert $z = 0$ annimmt. Es ist also

$$\operatorname{arc}\sin w = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

Dies Integral wurde in Nr. 637 behandelt.

Entsprechend ist $z = \operatorname{arc}\operatorname{tg} w$ diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{1 + w^2},$$

welche für $w = 0$ den Wert $z = 0$ annimmt. Es ist also

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} w = \int_0^w \frac{dw}{1 + w^2}.$$

Auch die Additionstheoreme gelten wie bei reellen Variabelen.

646. Zurückführung der bekannten Transcendenten auf e^z. Mit Hülfe der Eulerschen Gleichung (Nr. 373)

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z \tag{1}$$

führen sich alle bekannten Transcendenten, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, lz, $\operatorname{arc}\sin z$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} z$ auf e^z und lz als einzige wesentliche Transcendenten zurück.

Schon in Nr. 373 wurde gefunden:

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}. \tag{2}$$

Wir finden daher weiter:

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = i \cdot \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}}. \tag{3}$$

Aus der ersten Gleichung (2) folgt durch Auflösung nach e^{zi}, wenn $w = \sin z$ gesetzt wird:

$$e^{zi} = \sqrt{1 - w^2} + w \cdot i,$$

also

$$z = \arcsin w = \frac{1}{i} l\left(\sqrt{1 - w^2} + w \cdot i\right). \tag{4}$$

Endlich ergiebt die erste Gleichung (3) durch Auflösung nach e^{zi}, wenn $w = \operatorname{tg} z$ gesetzt wird:

$$e^{2zi} = \frac{1 + wi}{1 - wi},$$

also

$$z = \operatorname{arc\,tg} w = \frac{1}{2i} l\left(\frac{1 + wi}{1 - wi}\right). \tag{5}$$

647. Die elliptischen Funktionen. Ist w der Wert des elliptischen Integrales erster Gattung, so ist nach Nr. 638

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Betrachtet man umgekehrt z als Funktion von w, so wird:

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

wo die Wurzel für $z = 0$ gleich $+1$ zu setzen ist. Die hierdurch definierte Funktion ist die inverse zum Integral erster Gattung und wird nach Gudermann genannt der Modularsinus von w und bezeichnet mit $\operatorname{sn} w$, so dafs

$$z = \operatorname{sn} w$$

nur eine andere Schreibweise der Gleichung

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

bedeutet.

Neben $\operatorname{sn} w$ betrachtet man noch die Funktionen

$$\operatorname{cn} w = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 w}, \qquad \operatorname{dn} w = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w},$$

wo für $w = 0$

$$\operatorname{cn} w = +1, \qquad \operatorname{dn} w = +1$$

zu setzen ist.

Wir nehmen für den Augenblick die Variabeln reell an. Es sei dann Z ein Wert von z zwischen -1 und $+1$, und W

der entsprechende Wert von w, wenn man so integriert, daſs z in demselben Sinne sich von 0 bis Z ändert, und daſs dabei die beiden Wurzeln $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-k^2z^2}$ positiv genommen werden. Dann ist

$$(1)\qquad Z=\operatorname{sn}W,\quad \sqrt{1-Z^2}=\operatorname{cn}W,\quad \sqrt{1-k^2Z^2}=\operatorname{dn}W.$$

Die reelle Periode. Wir nehmen nun $Z>0$ an und integrieren das Differential so, daſs wir z von 0 bis 1 wachsen, alsdann von 1 bis 0 abnehmen und schlieſslich aufs neue von 0 bis $-Z$ abnehmen lassen. Im ersten Intervalle wird das Integral gleich K, im zweiten wird die Wurzel $\sqrt{1-z^2}$, nachdem sie null geworden ist, negativ und das Integral hat ebenfalls den Wert K. Im letzten Intervalle endlich bleibt $\sqrt{1-z^2}$ negativ und das entsprechende Integral

$$\int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$$

ist gleich W. Demnach wird, indem man noch beachtet, daſs $\sqrt{1-k^2z^2}$ positiv geblieben ist:

$$(2)\qquad \begin{cases} -Z=\operatorname{sn}(2K+W), \\ -\sqrt{1-Z^2}=\operatorname{cn}(2K+W), \\ \sqrt{1-k^2Z^2}=\operatorname{dn}(2K+W). \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daſs man dieselben Formeln erhält, indem man $Z<0$ annimmt. Vergleicht man sie mit den Gleichungen (1) und schreibt man w an Stelle von W, so ist:

$$(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(2K+w)=-\operatorname{sn}w, \\ \operatorname{cn}(2K+w)=-\operatorname{cn}w, \\ \operatorname{dn}(2K+w)=\operatorname{dn}w. \end{cases}$$

Also ändern die Funktionen $\operatorname{sn}w$ und $\operatorname{cn}w$ nur ihr Zeichen, wenn man der Variabelen den konstanten Wert $2K$ hinzufügt. Daraus folgt, daſs diese Funktionen sich nicht ändern werden, wenn man diese Addition noch einmal wiederholt. Es wird demnach:

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(4K+w)=\operatorname{sn}w, \\ \operatorname{cn}(4K+w)=\operatorname{cn}w, \end{cases}$$

woraus hervorgeht, dafs diese beiden Funktionen die Periode $4K$ besitzen; die letzte der Gleichungen (3) besagt, dafs dn die Periode $2K$ hat.

Die imaginäre Periode. Der Wert Z sei immer noch positiv und kleiner als 1. Wir nehmen nun an, dafs man beim Übergang von 0 zu Z die Variabele z erst von 0 bis $\frac{1}{k}$ wachsen läfst, und dafs man sie alsdann wiederum abnehmen läfst von $\frac{1}{k}$ bis Z. Die Wurzeln $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-k^2z^2}$ sind im Anfangspunkte mit dem positiven Zeichen genommen. Von 0 bis 1 ist das Integral des Differentiales

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}},$$

gleich K. Von 1 bis $\frac{1}{k}$ ist dieses Differential imaginär und hat den Wert:

$$i\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{1-k^2z^2}}.$$

Die Wurzel $\sqrt{1-k^2z^2}$ mufs dabei immer noch mit dem positiven Zeichen genommen werden, aber das Zeichen von $\sqrt{z^2-1}$ ist unbestimmt. Es steht uns frei, das Zeichen $+$ zu nehmen, auf Grund der Zweideutigkeit des Zeichens von $i=\sqrt{-1}$. Von 1 bis $\frac{1}{k}$ wird also das Integral des vorstehenden Differentiales gleich $K'i$ (Nr. 638). Nimmt nun z wiederum ab von $\frac{1}{k}$ bis 1, so mufs die Wurzel $\sqrt{1-k^2z^2}$, welche null geworden war, mit dem — Zeichen genommen werden, und das Integral in Bezug auf dieses Intervall hat noch den Wert $K'i$. Man mufs nun z von 1 bis Z abnehmen lassen, alsdann wird das Differential wieder reell, die Wurzel $\sqrt{1-k^2z^2}$ bleibt negativ, dagegen ergiebt sich keine Bestimmung für das Vorzeichen von $\sqrt{1-z^2}$, da diese Wurzel von einem imaginären zu einem reellen Werte übergeht. Ich setze also das zweideutige Zeichen $\pm$ vor diese Wurzel, und also wird das Integral in diesem letzten Intervalle, wenn wir die Vorzeichen zur Evidenz bringen:

$$\int_1^Z \frac{dz}{(\pm\sqrt{1-z^2})(-\sqrt{1-k^2z^2})}.$$

Da $Z < 1$ ist, so ist dz negativ, und das vorstehende Integral hat daher, wie man leicht erkennt, den Wert $\pm(K - W)$. Geht also z von 0 bis Z auf dem angegebenen Wege, so erhält man ein Integral, dessen Wert

$$K + 2iK' \pm (K - W)$$

ist, und es wird also:

$$(5)\quad \begin{cases} Z = \operatorname{sn}[K + 2iK' \pm (K - W)], \\ \pm\sqrt{1 - Z^2} = \operatorname{cn}[K + 2iK' \pm (K - W)], \\ -\sqrt{1 - k^2 Z^2} = \operatorname{dn}[K + 2iK' \pm (K - W)]. \end{cases}$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ kann sowohl durch $+$, als durch $-$ ersetzt werden. Welches Zeichen man auch wählen mag, man gelangt, wie sich gleich zeigen wird, zu dem nämlichen Resultate.

Vergleicht man die Formeln (5) mit den Formeln (1) und ersetzt man dabei zuerst das Zeichen $\pm$ durch $-$, so wird, wenn man w statt W schreibt:

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(2iK' + w) = \operatorname{sn} w, \\ \operatorname{cn}(2iK' + w) = -\operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(2iK' + w) = -\operatorname{dn} w. \end{cases}$$

Ersetzt man w durch $w + 2K$ in der zweiten und durch $w + 2iK'$ in der dritten Gleichung, so wird auf Grund der zweiten Gleichung in (3):

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(2K + 2iK' + w) = \operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(4iK' + w) = \operatorname{dn} w. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (6) zeigt, dafs $\operatorname{sn} w$ die Periode $2iK'$ hat; die Gleichungen (7) besagen, dafs $\operatorname{cn} w$ die Periode $2K + 2iK'$, $\operatorname{dn} w$ die Periode $4iK'$ hat.

Ersetzt man in den Formeln (5) das Zeichen $\pm$ durch $+$, so giebt der Vergleich mit den Gleichungen (1):

$$(8)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(2K + 2iK' - w) = \operatorname{sn} w, \\ \operatorname{cn}(2K + 2iK' - w) = \operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(2K + 2iK' - w) = -\operatorname{dn} w. \end{cases}$$

Nun erkennt man aber leicht, dafs, wenn z in derselben Weise von 0 bis $+Z$ und von 0 bis $-Z$ variiert, das Integral

des Differentiales $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$ in beiden Fällen denselben Wert, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, erhält, während die Werte von $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-k^2z^2}$ übereinstimmen. Daraus folgt, dafs sn w eine unpaare Funktion von w ist, d. h. eine Funktion, welche mit dem Vorzeichen von w auch nur ihr Vorzeichen ändert, dafs dagegen cn w und dn w paare Funktionen sind. Verwandeln wir nun w in $-w$ in den Gleichungen (8) und lassen alsdann die halbe Periode $2K$ fort, indem wir auf den rechten Seiten in den Gleichungen für sn w und cn w das Vorzeichen ändern, so gelangen wir zu den Gleichungen (6), welche also sowohl für positive wie für negative Werte von w gelten. Zu denselben Resultaten wäre man auch ausgehend von der Annahme $Z < 0$ gelangt.

Man erkennt aus dieser Untersuchung, dafs die elliptischen Funktionen sn w, cn w, dn w die besondere Eigenschaft besitzen, doppeltperiodisch zu sein. Die erste Funktion hat die Perioden $4K$ und $2iK'$, die zweite die Perioden $4K$ und $2K+2iK'$, endlich die dritte die beiden Perioden $2K$ und $4iK'$. Um diese Eigenschaft festzustellen, haben wir nur die reellen Werte der ersten Funktion sn w betrachtet, doch können wir diese Untersuchungen nicht weiter verfolgen, ohne die Grenzen, welche wir uns gesteckt haben, zu überschreiten.

648. Die Lagrangesche Reihe. Gegeben sei die Reihenentwickelung

$$w = f(z) = w_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

wo $c_1 \neq 0$. Nach Nr. 644 besteht dann umgekehrt die Entwickelung

$$z = \varphi(w) = z_0 + e_1(w-w_0) + e_2(w-w_0)^2 + \cdots.$$

Wir fragen nach dem Bildungsgesetz der Koeffizienten.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, können wir $w_0 = 0$ annehmen, so dafs $f(z)$ für $z = z_0$ verschwindet.

Mit Lagrange behandeln wir gleich das allgemeinere Problem:

$F(z)$ lasse sich in der Umgebung von $z = z_0$ in eine Reihe nach Potenzen von $z - z_0$ entwickeln. Wir wollen

$F(z)$ nun nach Potenzen von $w = f(z)$ entwickeln. Wir suchen also die Darstellung

(1) $$F(z) = F(z_0) + w \left(\frac{dF}{dw}\right)_{w=w_0} + \cdots.$$

Da wir nun im Folgenden auch die Differentialquotienten nach z_0 brauchen, so werden wir statt der Zeichen der totalen Differentialquotienten uns der partiellen bedienen.

Ziel ist nämlich, die Koeffizienten der oben geforderten Entwickelung, welche *Differentialquotienten nach* w sind, zu ersetzen durch *Differentialquotienten nach* z_0.

Wir gehen aus von der Formel

(2) $$z = z_0 + wg(z),$$

durch die wir die Funktion w einführen, die in den folgenden Entwickelungen eine fundamentale Rolle spielt. Sie ist weiter nichts als der Differenzenquotient von $z - z_0$ und der zugehörigen Zunahme der Funktion: $w - w_0 = w$ (für $w_0 = 0$).

An diese Formel (2) schliefsen wir gleich die beiden folgenden:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = g(z) + w \frac{dg}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial z_0} = 1 + w \cdot \frac{dg}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

aus welchen folgt

(3) $$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial z_0} g(z).$$

Nun bilden wir die successiven Differentialquotienten von F nach w.

Zunächst ist

(4) $$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0} g(z),$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial z_0} g(z).$$

Um die höheren Differentialquotienten zu erhalten, ziehen wir eine Relation heran, welche uns eine Rekursionsformel liefert.

Diese Relation lautet:

(5) $$\frac{\partial \left(\psi(z) \frac{\partial z}{\partial z_0}\right)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\psi(z)\, g(z) \frac{\partial z}{\partial z_0}\right),$$

wo $\psi(z)$ willkürlich ist.

Man beweist sie, indem man auf der linken Seite die Differentiation nach w vermöge der Formel (3) durch eine solche nach z_0 ersetzt.

Hieraus folgt aber durch weitere Differentiation:

$$(6)\qquad \frac{\partial^n\left(\psi(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)}{\partial w^n} = \frac{\partial^n}{\partial z_0^n}\left(\psi(z)\,g^n(z)\,\frac{\partial z}{\partial z_0}\right).$$

In der That für $n = 1$ ist die Gleichung richtig, denn für $n = 1$ ist (6) mit (5) identisch. Nimmt man nun an, (6) sei für den Wert n bereits bewiesen, so folgt durch erneute Differentiation:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial w^{n+1}}\left(\psi(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial z_0}\right) &= \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial^n}{\partial z_0^n}\left(\psi(z)\,g^n(z)\,\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\\ &= \frac{\partial^n}{\partial z_0^n}\frac{\partial}{\partial w}\left(\psi(z)\,g^n(z)\,\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\\ &= \frac{\partial^{n+1}}{\partial z_0^{n+1}}\left(\psi(z)\,g^{n+1}(z)\,\frac{\partial z}{\partial z_0}\right).\end{aligned}$$

Das ist aber die Gleichung (6) für den Wert $(n + 1)$.

Nun war aber

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{dF}{dz}\,g(z)\,\frac{\partial z}{\partial z_0},$$

also ist nach (6), wenn wir darin substituieren:

$$(7)\qquad \begin{gathered}\psi(z) = g(z)\cdot\frac{dF}{dz},\\ \frac{\partial^n F}{\partial w^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_0^{n-1}}\left(g^n(z)\cdot\frac{dF}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial z_0}\right).\end{gathered}$$

Setzt man hierin $w = 0$, also $z = z_0$, so kommt

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial^n F}{\partial w^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{dz_0^{n-1}}\left(g^n(z_0)\,F'(z_0)\right).$$

Demnach lautet die Reihenentwickelung:

$$(9)\quad F(z) = F(z_0) + wF'(z_0)\,g(z_0) + \frac{w^2}{1\cdot 2}\frac{d}{dz_0}\left(F'(z_0)\,g^2(z_0)\right) + \cdots.$$

Hier können wir noch die Hülfsfunktion $g(z)$ eliminieren. Es war nach Formel (2)

$$g(z) = \frac{z - z_0}{w} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}.$$

Also wird für $z = z_0$

$$g(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Setzt man dies in (9) ein, so entsteht die gesuchte Formel

$$(10) \qquad F(z) = F(z_0) + \frac{w}{1}\frac{F'(z_0)}{f'(z_0)} + \frac{w^2}{1\cdot 2} D_{z_0} \frac{F'(z_0)}{f'^2(z_0)} + \frac{w^3}{3!} D_{z_0}^2 \frac{F'(z_0)}{f'^3(z_0)} + \cdots.$$

Dabei bedeutet $D_{z_0}^n$ die n-malige Differentiation nach z_0.

Die rechte Seite von (10) heifst die **Lagrangesche Reihe.** Aus ihr folgt im Besonderen für $F(z) = z$ die Reihenentwickelung der inversen Funktion:

$$(11) \quad z = z_0 + \frac{w}{1!}\frac{1}{f'(z_0)} + \frac{w^2}{1\cdot 2} D_{z_0}\frac{1}{f'^2(z_0)} + \frac{w^3}{3!} D_{z_0}^n \frac{1}{f'^3(z_0)} + \cdots.$$

Der Konvergenzbereich dieser Entwickelung wird in der in Nr. 644 angegebenen Weise durch die Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$ bestimmt. Will man in dieser Gleichung lieber die Hülfsfunktion g stehen haben, so beachte man, dafs nach (2):

$$f(z) = \frac{z - z_0}{g(z)},$$

also:

$$f'(z) = \frac{g(z) - (z - z_0)\, g'(z)}{g(z)^2} = 0$$

ist. Es folgt also:

$$z - z_0 = \frac{g(z)}{g'(z)}$$

oder

$$(12) \qquad z = z_0 + \frac{g(z)}{g'(z)}$$

als die gewünschte Gleichungsform.

Bemerkung: Um auch die Funktion

$$F'(z)\frac{\partial z}{\partial z_0} = \frac{F'(z)}{1 - w\, g'(z)}$$

nach Potenzen von w zu entwickeln, braucht man blofs in Gleichung (6) $\psi(z)$ durch $F'(z)$ zu ersetzen und dann $w = 0$, $z = z_0$, $\frac{\partial z}{\partial z_0} = 1$ zu setzen. Man erhält auf diese Weise:

$$F'(z) = F'(z_0) + \frac{w}{1} D_{z_0}[g(z_0)\, F'(z_0)] + \frac{w^2}{2!} D_{z_0}^2 [g^2(z_0)\, F'(z_0)] + \cdots.$$

Dasselbe Resultat würde die direkte Differentiation von (9) nach z_0 liefern Wir sehen also:

Die Reihe (10) *darf gliedweise nach* z_0 *differentiiert werden.*

649. Anwendung auf trinomische Gleichungen. Wir stellen uns die Aufgabe, die Wurzel z der trinomischen Gleichung

$$z = z_0 + w z^m$$

als Funktion des Koeffizienten w zu berechnen, wenn m eine ganze positive Zahl ist. Die Gleichung (12) der vorigen Nummer wird hier, da $g(z) = z^m$ ist:

$$z = z_0 + \frac{z}{m} \quad \text{oder} \quad z = \frac{m z_0}{m-1}$$

und die Gleichung (2) derselben Nummer giebt folglich:

$$w = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m z_0^{m-1}}.$$

Wir müssen demnach w beschränken auf die Werte, deren Betrag kleiner ist als

$$\varrho = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m |z_0|^{m-1}}.$$

Alsdann wird der Wert von z nach (11):

$$z = z_0 + z_0{}^m w + \frac{2m}{2!} z_0{}^{2m-1} w^2 + \frac{3m(3m-1)}{3!} z_0{}^{3m-2} w^3 + \cdots$$
$$+ \frac{nm(nm-1)\cdots(nm-n+2)}{n!} z_0{}^{mn-n+1} w^n + \cdots.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe hat den Wert:

$$u_n = \frac{nm(nm-1)\cdots(nm-n+2)}{n!} z_0{}^{mn-n+1} w^n$$

und folglich ist:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \frac{(nm+m)(nm+m-1)\cdots(nm+1)}{(nm-n+2)\cdots(nm-n+m)} z_0{}^{m-1} w.$$

Die Grenze dieses Verhältnisses für $n = \infty$ ist gleich:

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} z_0{}^{m-1} w$$

und der absolute Betrag davon gleich:

$$\frac{|w|}{\varrho}.$$

Man erkennt also, nach den gewöhnlichen Regeln (Nr. 103), dafs die erhaltene Reihe in der That nur konvergent ist für die Werte von w, deren Betrag kleiner als ϱ ist.

650. Anwendung auf die Kugelfunktionen. Die Lagrangesche Reihe läfst sich auch oftmals verwerten, um die Reihenentwickelungen für explicite Funktionen zu erhalten. Wir wollen hier zwei Beispiele dafür geben.

Es soll erstlich die Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2wz_0 + w^2}},$$

in welcher z_0 reell und dem absoluten Betrag nach kleiner als 1 ist, nach Potenzen von w entwickelt werden.

Man betrachte zu diesem Zwecke die Gleichung zweiten Grades:

$$(1) \qquad u = z_0 + w\frac{u^2 - 1}{2},$$

deren Wurzeln bestimmt sind durch die Gleichung:

$$(2) \qquad u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2z_0 w + w^2}}{w}.$$

Damit die Gleichung (1) eine Doppelwurzel bekommt, mufs

$$1 - 2z_0 w + w^2 = 0$$

sein, also:

$$w = z_0 \pm i\sqrt{1 - z_0^2}.$$

Da z_0 reell ist und zwischen -1 und $+1$ liegt, so ist der Betrag der beiden Werte von w gleich 1. Folglich ist für alle Werte von w, die absolut genommen kleiner als 1 sind, diejenige unter den Wurzeln der Gleichung (1), welche für $w = 0$ den Wert z_0 bekommt, in eine konvergente Reihe entwickelbar. Nehmen wir w reell und dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, so lautet die Lagrangesche Reihe

$$\frac{-\sqrt{1 - 2wz_0 + w^2}}{w} = z_0 + \frac{z_0^2 - 1}{2}\frac{w}{1!} + D_{z_0}\left(\frac{z_0^2 - 1}{2}\right)^2 \frac{w^2}{2!} + \cdots$$
$$+ D_{z_0}^{n-1}\left(\frac{z_0^2 - 1}{2}\right)^n \frac{w^n}{n!} + \cdots,$$

und differentiiert man diese Gleichung nach z_0, so folgt (Nr. 648, Bemerkung):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2wz_0+z_0^2}} = 1 + X_1 w + X_2 w^2 + \cdots + X_n w^n + \cdots,$$

wobei:

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} D_{z_0}^n (z_0^2 - 1)^n.$$

Die X sind, wie man sieht, ganze rationale Funktionen von z_0, deren Grad gleich ihrem Index ist. Sie heifsen *Kugelfunktionen* oder *Legendresche Polynome.*

651. Eine neue Anwendung. Es soll zweitens die Funktion

$$\frac{(\zeta - w)^m}{(1-w)^{m+1}}$$

nach Potenzen von w entwickelt werden. Wendet man die Reihe von Lagrange auf die Gleichung

(1) $$z = \zeta + w g(z)$$

an, wobei z eine Funktion der komplexen Variabelen ζ und w bezeichnet, und $g(z)$ eine beliebige Funktion der komplexen Variabelen z, so folgt:

$$F(z) = \sum \frac{w^n}{n!} D_\zeta^{n-1} [F'(\zeta) f(\zeta)^n],$$

und differentiiert man nach ζ, so kommt:

$$F'(z) \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum \frac{w^n}{n!} D_\zeta^n [F'(\zeta) f(\zeta)^n].$$

Es sei nun

(2) $$F'(z) = z^m \quad \text{und} \quad g(z) = z - 1,$$

so ergiebt Gleichung (1):

$$z = \frac{\zeta - w}{1 - w}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{1-w}$$

und folglich wird die Gleichung (2):

$$\frac{(\zeta - w)^m}{(1-w)^{m+1}} = \sum \frac{w^n}{n!} D_\zeta^n [\zeta^m (\zeta - 1)^n],$$

eine Gleichung, welche bei ganzem positiven m für jedes w gilt, dessen Betrag kleiner als 1 ist.

§ 5. Übertragung der bisherigen Resultate auf komplexe Funktionen von mehreren Veränderlichen.

652. Definition der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Der Begriff der komplexen Funktion von mehreren Variabelen ist ein sehr einfacher. Es seien etwa $z_1, z_2, \cdots z_n$ diese Veränderlichen; alsdann heifst:

$$w = f(z_1, z_2, \cdots z_n)$$

eine komplexe Funktion von $z_1, z_2, \cdots z_n$, wenn es eine komplexe Funktion jeder einzelnen Veränderlichen ist.

Die Funktion wird in der Regel nicht für alle Wertsysteme $z_1, z_2, \cdots z_n$ gegeben sein, sondern nur für einen bestimmten Variabilitätsbereich, z. B. für alle Zahlen z, die den Bedingungen:

$$|z_1 - z_1^0| < \varrho_1, \quad |z_2 - z_2^0| < \varrho_2, \quad \cdots \quad |z_n - z_n^0| < \varrho_n$$

genügen, in denen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ positive reelle Konstanten und $z_1^0, z_2^0, \cdots z_n^0$ irgend welche komplexe Konstanten bedeuten.

Die Sätze, welche wir über Funktionen *einer* komplexen Variabelen bisher abgeleitet haben, übertragen sich ohne Weiteres auf Funktionen von *mehreren* Veränderlichen. Aus der Fülle des Selbstverständlichen wollen wir nur einige wenige Thatsachen herausgreifen, die von besonderer Wichtigkeit sind.

653. Ein Hülfssatz. Wir wollen zuerst einen Hülfssatz ableiten, der an sich seiner Natur nach kein Analogon bei den Funktionen einer Veränderlichen besitzt, der uns aber später zur Übertragung eines wichtigen Satzes von komplexen Funktionen einer Veränderlichen auf mehrere Veränderliche führen soll. Er lautet:

Satz 1. Es seien $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ zwei komplexe Veränderliche und:

$$w = f(z_1, z_2) = \varphi(x_1, y_1; x_2, y_2) + \psi(x_1, y_1; x_2, y_2)\, i$$

eine komplexe Funktion von z_1 und z_2. Setzt man nun

$$z_1 = z_2 = z = x + yi,$$

so wird $f(z, z)$ eine komplexe Funktion von z.

In der That, setzen wir:

$$f(z, z) = \varphi(x, y; x, y) + \psi(x, y; x, y)\, i = u + vi,$$

so wird:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_{\substack{x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2}}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial \psi}{\partial y_1} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y_2}\right]_{\substack{x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2}}, \end{cases}$$

wobei als Argumente von φ und ψ die Veränderlichen x_1, y_1; x_2, y_2 zu denken sind. Da aber φ und ψ nach Voraussetzung der reelle und imaginäre Teil einer komplexen Funktion sind, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

und die beiden anderen, welche sich aus diesen durch Vertauschung von x_1 mit x_2 und y_1 mit y_2 ergeben. Setzen wir daher $z_1 = z_2$, so wird $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ und:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

für $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Mithin wird auch:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi}{\partial y_2}$$

für $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Bezeichnet man daher den gemeinsamen Wert von x_1 und x_2 mit x, den gemeinsamen Wert von y_1 und y_2 mit y, so folgt aus der letzten Gleichung und aus Gleichung (1) unmittelbar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ebenso ergiebt sich, dafs auch:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ist.

Der Satz I läfst sich leicht verallgemeinern. Es gilt der:

Satz II. Ist $f(z_1, z_2, \cdots z_n)$ eine komplexe Funktion von $z_1, z_2, \cdots z_n$ und setzt man beliebig viele der z einander gleich, so erhält man eine komplexe Funktion der übrigbleibenden Veränderlichen.

In der That, $f(z_1, z_2, \cdots z_n)$ ist jedenfalls eine komplexe Funktion von z_1 und z_2, nach dem vorigen Satze entsteht daher wieder eine *komplexe* Funktion, wenn man $z_1 = z_2$ setzt und allgemein wird aus f wieder eine komplexe Funktion, wenn man irgend zwei der z einander gleich setzt. Die Gleichsetzung von beliebig vielen Werten z läfst sich aber durch successive Gleichsetzung je zweier z erreichen; mithin ist unser Satz erwiesen.

654. Die Gruppeneigenschaft. Wir benutzen die so eben erwiesenen beiden Hülfssätze, um eine Übertragung der in Nr. 623 erwiesenen Gruppeneigenschaft auf komplexe Funktionen von mehreren Variabelen zu geben. Es gilt der:

Satz. Eine komplexe Funktion von beliebig vielen komplexen Funktionen von $z_1, z_2, \cdots z_n$ ist selbst eine komplexe Funktion von $z_1, z_2, \cdots z_n$.

In der That, es seien:

$$w_1, w_2, \cdots w_m$$

m komplexe Funktionen von $z_1, z_2, \cdots z_n$ und:

$$W = F(w_1, w_2, \cdots w_m)$$

eine komplexe Funktion von $w_1, w_2, \cdots w_m$. Wir erteilen jetzt $z_1, z_2, \cdots z_n$ das besondere Wertsystem:

$$z_1', z_2', \cdots z_n'$$

und nennen ω_1 den zugehörigen Wert von w_1; sodann erteilen wir $z_1, z_2, \cdots z_n$ ein anderes Wertsystem:

$$z_1'', z_2'', \cdots z_n''$$

und nennen ω_2 den zugehörigen Wert von w_2. So fahren wir fort, bis schliefslich $z_1, z_2, \cdots z_n$ das Wertsystem:

$$z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \cdots z_n^{(m)}$$

erteilt ist, zu welchem der Wert ω_m von w_m gehört. Wir können nun die $m \cdot n$ Werte

$$\begin{matrix} z_1', & z_2', & \cdots & z_n', \\ z_1'', & z_2'', & \cdots & z_n'', \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(m)}, & z_2^{(m)}, & \cdots & z_n^{(m)} \end{matrix}$$

als eben soviele unabhängige Veränderliche auffassen. Alsdann ist $F(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_m)$ eine komplexe Funktion dieser $m \cdot n$ Veränderlichen z. In der That, der Ausdruck

$$(1) \qquad F(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_m)$$

ist jedenfalls eine komplexe Funktion von ω_1 und dieses wieder eine komplexe Funktion von z_1'; also ist nach dem Satze der Nr. 653, (1) eine komplexe Funktion von z_1'.

Was von z_1' gilt, gilt auch von jeder der Veränderlichen z; daher ist

$$F(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_m)$$

eine komplexe Funktion der $m \cdot n$ Variabelen

$$\begin{array}{llll} z_1', & z_2', & \cdots & z_n', \\ z_1'', & z_2'', & \cdots & z_n'', \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(m)}, & z_2^{(m)} & \cdots & z_n^{(m)}. \end{array}$$

Setzt man nun wieder:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1' = z_1'' = \cdots = z_1^{(m)}, \\ z_2 &= z_2' = z_2'' = \cdots = z_2^{(m)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= z_n' = z_n'' = \cdots = z_n^{(m)}, \end{aligned}$$

so wird nach dem vorigen Satze die entstehende Funktion eine Funktion von $z_1, z_2, \cdots z_n$. Da aber bei dieser Substitution ω_1 in w_1, ω_2 in w_2 u. s. w. ω_m in w_m übergeht, so wird

$$F(w_1, w_2, \cdots w_m)$$

eine komplexe Funktion der z, wie behauptet war.

Hieraus folgt im Besonderen, dafs die Summe, Differenz, das Produkt, der Quotient zweier komplexen Funktionen wieder eine komplexe Funktion ist, was schon in Nr. 623 benutzt wurde.

Ferner erkennt man leicht, dafs komplexe Funktionen von mehreren Veränderlichen sich genau wie reelle Funktionen nach den einzelnen Veränderlichen differentiieren und integrieren lassen, und dafs das Ergebnis einer jeden solchen Rechnung wieder eine komplexe Funktion ist.

655. Übertragung eines Integralsatzes. Wir wollen jetzt den Satz der Nr. 639 auf mehrere Veränderliche übertragen. Es sei daher $f(z_1, z_2)$ eine Funktion von z_1 und z_2, die für alle Wertepaare (z_1, z_2) eines bestimmten Variabilitätsbereiches V die der Forderung $\mathfrak{K}$ (Nr. 639) entsprechende Forderung erfüllt:

Forderung $\mathfrak{L}$. *Die Funktion ist eindeutig und stetig nebst ihren sämtlichen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschliefslich.*

Wir fixieren nun einen bestimmten Wert ζ_1 für z_1 und einen bestimmten Wert ζ_2 für z_2 und endlich einen Umlauf $\mathfrak{U}_1$ um z_1 für ζ_1; sowohl das Wertepaar (z_1, ζ_2) als der Weg $\mathfrak{U}_1$ sollen dem Bereiche V angehören. Alsdann ist nach dem Satz der Nr. 639:

$$f(z_1, \zeta_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{U}_1}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}. \tag{1}$$

Läfst man jetzt auch ζ_2 den Umlauf $\mathfrak{U}_2$ machen, während z_1 fest bleibt, so findet man durch nochmalige Anwendung des Satzes der Nr. 639:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{U}_2}\frac{f(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2}.$$

Vorausgesetzt ist dabei natürlich, dafs auch $\mathfrak{U}_2$ sich innerhalb V befindet und dafs z_2 innerhalb $\mathfrak{U}_2$ liegt. Substituieren wir in die letzte Gleichung den Wert von $f(z_1, \zeta_2)$ aus Gleichung (1), so erhalten wir den Wert von $f(z_1, z_2)$ ausgedrückt durch ein zweifaches Integral und dadurch die gewünschte Verallgemeinerung des Satzes der Nr. 639 auf zwei Veränderliche; es wird:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}.$$

Die Integration ist hierbei successive erst nach der einen, dann nach der anderen Veränderlichen ζ auszuführen. Nach welcher der beiden Variabelen zuerst integriert wird, ist gleichgültig.

Wir haben so den gewünschten

Satz. In dem Bereiche V erfülle $f(z_1, z_2)$ die Forderung $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ seien positive Umläufe für z_1 bezw. z_2, die inner-

halb V liegen. Alsdann ist $f(z_1, z_2)$ gleich dem zweifachen Integrale:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}.$$

Ganz analog gilt für n Veränderliche der

Satz. *In dem Bereiche V erfülle $f(z_1, z_2, \cdots z_n)$ die Forderung $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \cdots \mathfrak{U}_n$ seien positive Umläufe bezw. für $z_1, z_2, \cdots z_n$, die innerhalb V liegen. Alsdann ist $f(z_1, z_2, \cdots z_n)$ gleich dem n-fachen Integrale:*

$$f(z_1, z_2, \cdots z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathfrak{U}_1 \cdots \mathfrak{U}_n} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)}.$$

Der Beweis dieses Satzes möge dem Leser überlassen werden.

656. Cauchys Méthode des limites bei komplexen Funktionen von mehreren Veränderlichen. Aus dem soeben erwiesenen Satze lassen sich nun zunächst in ganz analoger Weise wie bei einer Veränderlichen Potenzreihen für die komplexen Funktionen ableiten. Das Bildungsgesetz der Koeffizienten ist durch den allgemeinen Taylorschen Satz gegeben (Nr. 137). Die Entwickelung konvergiert in Kreisen, innerhalb deren die Bedingung $\mathfrak{K}$ erfüllt ist. Wir geben in dieser Nummer die Übertragung der Methoden des „calcul des limites" (Nr. 643).

Wir wollen annehmen, daſs die Voraussetzungen der vorigen Nummer erfüllt sind, und von der Gleichung (2) dieser Nummer ausgehen, indem wir die Untersuchung an dem Beispiele von 2 Veränderlichen ausführen. Es ist:

$$(1) \qquad f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}.$$

Fig. 54.

Fig. 55.

Nimmt man auf beiden Seiten die absoluten Beträge, so erhält man:

$$(2)\qquad |f(z_1, z_2)| = \frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int\limits_{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2} \frac{f\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\right|.$$

Es seien ferner z_1^0 und z_2^0 zwei Punkte innerhalb $\mathfrak{U}_1$ bez. $\mathfrak{U}_2$. Ferner sei R_1 der kleinste Abstand des Punktes z_1^0 von $\mathfrak{U}_1$ und R_2 der kleinste Abstand des Punktes z_2^0 von $\mathfrak{U}_2$. (Vgl. Figur 54 und 55.) Der gröfste Wert, den $|f(\zeta_1, \zeta_2)|$ annimmt, während ζ_1 und ζ_2 auf $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ variieren, sei M. Alsdann ist das Integral in Gleichung (2) absolut genommen kleiner als

$$\frac{M s_1 s_2}{R_1 R_2},$$

wo s_1 und s_2 die Längen von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ bedeuten. Wir haben also:

$$(3)\qquad |f(z_1, z_2)| \leqq \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{M s_1 s_2}{R_1 R_2}$$

als obere Grenze für $|f|$.

Um nun auch für die Ableitungen von f eine obere Grenze zu erhalten, differentiieren wir unsere Ausgangsgleichung (1) λ mal nach z_1 und μ mal nach z_2; alsdann wird

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda}\, \partial z_2^{\mu}} = \frac{\lambda!\, \mu!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2} \frac{f\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{\lambda+1} (\zeta_2 - z_2)^{\mu+1}}$$

und daher:

$$(4)\qquad \left|\frac{\partial^{\lambda+\mu} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda}\, \partial z_2^{\mu}}\right| \leqq \frac{\lambda!\, \mu!}{(2\pi)^2} \frac{M s_1 s_2}{R_1^{\lambda+1} R_2^{\mu+1}},$$

eine Ungleichheit, die für $\lambda = \mu = 0$ in (3) übergeht.

Ist im Besonderen $\mathfrak{U}_1$ ein Kreis um z_1^0 mit dem Radius R_1, $\mathfrak{U}_2$ ein Kreis um z_2^0 mit dem Radius R_2, so wird:

$$s_1 = 2\pi R_1, \qquad s_2 = 2\pi R_2$$

und daher ergiebt sich:

$$\left|\frac{\partial^{\lambda+\mu} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda}\, \partial z_2^{\mu}}\right| \leqq \frac{\lambda!\, \mu!\, M}{R_1^{\lambda} R_2^{\mu}}$$

für jedes Wertepaar (z_1, z_2), das der Bedingung $|z_1 - z_1^0| < R_1$, $|z_2 - z_2^0| < R_2$ genügt. Also folgt für $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$ selbst:

$$(5)\qquad \left|\frac{\partial^{\lambda+\mu} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda}\, \partial z_2^{\mu}}\right|_0 \leqq \frac{\lambda!\, \mu!\, M}{R_1^{\lambda} R_2^{\mu}}.$$

Führen wir analog wie in Nr. 643 die Hülfsfunktion ein

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z_1 - z_1^0}{R_1}\right)\left(1 - \frac{z_2 - z_2^0}{R_2}\right)},$$

so ergiebt eine einfache Rechnung:

$$\left(\frac{\partial^{\lambda+\mu} \varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda} \partial z_2^{\mu}}\right)_0 = \frac{\lambda!\, \mu!\, M}{R_1^{\lambda} R_2^{\mu}}.$$

Also wird aus (5):

$$(6) \qquad \left|\frac{\partial^{\lambda+\mu} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda} \partial z_2^{\mu}}\right|_0 \leqq \left|\frac{\partial^{\lambda+\mu} \varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1^{\lambda} \partial z_2^{\mu}}\right|_0.$$

Dies ist die Übertragung des Satzes II der Nr. 643 auf 2 Variabele. Sie läſst sich ganz analog für n Variabele durchführen, und wir können daher den Satz aussprechen:

Satz. Um die Punkte $z_1^0, z_2^0, \cdots z_n^0$ seien Kreise mit den Radien $R_1, R_2, \cdots R_n$ beschrieben, innerhalb deren $f(z_1, z_2, \cdots z_n)$ die Forderung $\mathfrak{K}$ erfüllt. Der gröſste Wert, den f annimmt, während $z_1, z_2, \cdots z_n$ auf den Peripherieen der n Kreise variieren, sei M. Man bilde die Hülfsfunktion:

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots z_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z_1 - z_1^0}{R_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_n - z_n^0}{R_n}\right)}.$$

Alsdann ist an der Stelle $z_1 = z_1^0, \cdots, z_n = z_n^0$ der Wert jeder Ableitung von f absolut kleiner als der der entsprechenden Ableitung von φ.

Dieser Satz ist wieder von fundamentaler Bedeutung in der Theorie der Differentialgleichungen.

Anhang.

Grundriſs der Theorie der Fourierschen Reihe und des Fourierschen Integrales

von Axel Harnack.

---

1. Die zu entwickelnde Funktion. Für die analytische Darstellung von Funktionen, welche möglichst wenigen Voraussetzungen genügen oder, wie man auch kurz sagt, für ein bestimmtes Intervall der reellen Variabelen x *willkürlich* definiersind, ist, zumal in der Theorie und Anwendung partieller Different tialgleichungen, die Beantwortung der Frage wichtig: *Läſst sich jede Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellen, und wie sind dann die Koeffizienten dieser Reihe zu bestimmen?* Fourier, welcher zuerst in seiner Theorie der Wärmeleitung die systematische Untersuchung dieser Frage begonnen hat, die früher schon Gegenstand der Kontroverse zwischen Euler und D'Alembert bildete, gab zur Lösung derselben im allgemeinen nur das Verfahren an, welches in Nr. 492—494 ausgeführt worden ist, von dem wir aber sahen, daſs es den ersten Teil des Problemes gar nicht, den anderen nur mit Hülfe einer besonderen Voraussetzung beantwortet.

Unter einer in einem reellen Intervalle von $z = a$ bis $z = b$ *willkürlich* gegebenen Funktion $f(z)$ verstehen wir ein Gesetz, nach welchem für jeden einzelnen Wert von z ein Funktionswert irgendwie definiert ist. Ein sehr wesentlicher Unterschied solch einer Funktion von allen rationalen, algebraischen, sowie überhaupt von allen Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen nach der Taylorschen Formel darstellbar sind, besteht darin, daſs bei diesen die Definition der Funktion innerhalb eines noch so kleinen endlichen Intervalles zugleich über den ganzen weiteren Verlauf derselben entscheidet. Denn kennt man von einer konvergenten Potenzreihe die Werte der Funktion in der Umgebung einer Stelle, so daſs man daselbst die Werte sämtlicher Ableitungen zu bilden im stande ist, so folgt aus diesen Werten auch die gesamte Potenzreihe. Bei einer willkürlichen Funktion dagegen entscheidet

die Beschaffenheit der Funktion innerhalb eines bestimmten Teiles der Strecke a bis b noch gar nichts über den Verlauf der Funktion aufserhalb dieses Teiles. Eine in diesem Sinne willkürliche Funktion kann also sicherlich nicht für das gesamte Intervall von a bis b durch *eine* Potenzreihe ausgedrückt werden.

Wir wollen aber den Begriff der willkürlichen Funktion für das folgende noch etwas einschränken. Die Funktion $f(z)$ sei für das Intervall von a bis b so definiert, dafs sie mit Ausnahme einzelner, in endlicher Anzahl vorhandener Punkte bei jedem Werte von z einen bestimmten Wert hat, und dafs sie auch mit Ausnahme derselben Punkte überall stetig verläuft. An den Ausnahmepunkten aber möge die Funktion so beschaffen sein, dafs zwar $\lim f(z+h)$ und $\lim f(z-h)$ für $h=0$ daselbst bestimmte Werte besitzen, dafs aber diese Grenzwerte von einander verschieden sind. An solch einer Stelle z selbst werde der Wert der Funktion ganz unbestimmt gelassen; wesentlich für die Beschaffenheit der Funktion in der beiderseitigen Umgebung solch einer Stelle ist dann nur der Umstand, dafs sie daselbst eine sprungweise Wertänderung erleidet. Wir werden auf diese Weise dazu geführt unsere bisherige Beschränkung der Betrachtungen auf stetige Funktionen fallen zu lassen und die Untersuchungen auf eine allgemeinere Klasse von Funktionen auszudehnen. Dazu wollen wir zunächst den Begriff der *integrierbaren Funktion* kennen lernen, welcher den der stetigen Funktion als Spezialfall umfafst.

2. Begriff der Integrierbarkeit. Um zu entscheiden, ob eine gegebene Funktion $f(x)$ zwischen zwei gegebenen Grenzen x_0 und x integrierbar ist, verlangen wir vor allen Dingen, dafs sie zwischen x_0 und x niemals unendlich grofs wird.

Sodann teilen wir das gegebene Intervall wie in Nr. 404 in n Teilintervalle:

$$(x_0, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad \cdots \quad (x_{n-1}, x).$$

Fassen wir nun z. B. das erste dieser Intervalle (x_0, x_1) ins Auge, und denken uns die sämtlichen Werte markiert, die $f(x)$ in ihm annimmt. Wir bestimmen diejenige (kleinste) Zahl G_0, die nicht kleiner ist als alle Werte $f(x)$ des Intervalles (x_0, x_1), und diejenige (gröfste) Zahl g_0, die nicht gröfser ist als alle Werte $f(x)$ desselben Intervalles, und nennen G_0 die obere, g_0 die untere Grenze der Werte von $f(x)$ in diesem Intervalle. Analog sei in den anderen Intervallen:

$$\left.\begin{array}{lllll} (x_1, x_2) & g_1 & \text{die untere,} & G_1 & \text{die obere} \\ (x_2, x_3) & g_2 & \text{„} \quad \text{„} , & G_2 & \text{„} \quad \text{„} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_{n-1}, x) & g_{n-1} & \text{„} \quad \text{„} , & G_{n-1} & \text{„} \quad \text{„} \end{array}\right\} \text{Grenze der Werte von } f(x).$$

Alsdann können wir genau wie in Nr. 405, Gleichung (1) die zwei Funktionen $\Phi_n(x, x_0)$ und $\Psi_n(x, x_0)$ bilden. Wir nennen nun die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (x_0, x) *integrierbar*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

Läfst man bei unbegrenzt wachsendem n die Gröfse sämtlicher Intervalle unter jede Grenze sinken, so erhält

1) $\Phi_n(x,x_0)$ einen endlichen Grenzwert: $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(x, x_0) = \Phi(x, x_0)$,

2) $\Psi_n(x,x_0)$ einen endlichen Grenzwert: $\lim\limits_{n=\infty} \Psi_n(x, x_0) = \Psi(x, x_0)$,

3) Es ist $\Phi(x, x_0) = \Psi(x, x_0)$.

Nennen wir $F(x, x_0)$ diesen gemeinsamen Wert von Φ und Ψ, so heifst dieser wie früher das zwischen den Grenzen x_0 und x genommene Integral von $f(x)$ und man schreibt wieder:

$$F(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

Ist $f(x)$ stetig, so sind die Bedingungen 1) bis 3) erfüllt, wie wir in Nr. 406 gezeigt haben. *Jede stetige Funktion ist also integrierbar.*

Das Umgekehrte gilt jedoch nicht. Gewisse Arten der Unstetigkeit heben nämlich die Integrierbarkeit nicht auf. Macht z. B. $f(x)$ in der Mitte des Intervalles einen Sprung, indem es dort plötzlich um ein endliches Stück wächst, während es im Übrigen stetig ist, so läfst sich leicht zeigen, dafs die Bedingungen 1) bis 3) erfüllt bleiben und allgemein ergiebt sich:

Die Funktion $f(x)$ ist integrierbar in dem Intervalle (x_0, x), wenn sie stetig ist mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen, in deren jeder sie um ein endliches Stück wächst oder abnimmt.

Dabei ist jedoch zu beachten, dafs hiermit der Umfang der integrierbaren Funktionen noch keineswegs erschöpft wird.

3. Eigenschaften des Integrales. Die elementaren Sätze über die Integrale, welche wir im ersten Kapitel für stetige Funktionen abgeleitet haben, übertragen sich sämtlich mutatis mutandis auf integrierbare Funktionen. Die *Additionsformel* der Nr. 407 und 410 überträgt sich samt dem Beweise ohne Weiteres und der Satz der Nr. 408 lautet jetzt so:

Die Ableitung des Integrales $F(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ *nach der oberen Grenze liefert den Wert* $f(x)$ *des Integranden an jeder Stelle* x*, wo* $f(x)$ *stetig ist.*

Macht aber die Funktion $f(x)$ an einer Stelle x, zu deren beiden Seiten sie stetig ist, einen endlichen Sprung, so bedeutet dies folgendes. Betrachtet man die Reihe der Werte $f(x+h)$ einerseits, $f(x-h)$ andrerseits, wo x eine feste Zahl und h eine positive nach 0 abnehmende Variable sein soll, so hat sowohl $f(x+h)$ als auch $f(x-h)$ an der Stelle $h=0$ einen endlichen Grenzwert, den wir mit $f(x+0)$, bezw. $f(x-0)$ bezeichnen wollen, und beide sind von einander verschieden. In diesem Falle erhalten auch die beiden Differenzenquotienten des Integrales:

$$\frac{F(x+h, x_0) - F(x, x_0)}{h}$$

und

$$\frac{F(x-h, x_0) - F(x, x_0)}{h}$$

an der Stelle $h=0$ die Grenzwerte $f(x+0)$ und $f(x-0)$. Den ersteren nennen wir dann den „vorwärts genommenen", den letzteren den „rückwärts genommenen" Differentialquotienten der Funktion $F(x, x_0)$ an der Stelle x. Der Beweis hierfür ist dem in Nr. 408 gegebenen völlig analog.

Aus der Definition der Integrierbarkeit folgt ferner, dafs die Summe und das Produkt zweier integrierbarer Funktionen wieder eine integrierbare Funktion ergeben, und es gelten die Sätze der Nr. 414 und 416 ohne Weiteres für alle integrierbaren Funktionen. Ebenso ergiebt sich unmittelbar aus der Definition die Richtigkeit des Satzes der Nr. 421 auch für integrierbare Funktionen und hieraus folgen wieder die Sätze der Nr. 422 und 424. Endlich bleibt auch der Satz von der teilweisen Integration (Nr. 415) bestehen, solange die Ableitungen von u und v integrierbare Funktionen sind, die in dem betrachteten Intervalle bestimmte endliche Werte besitzen (vergl. Bd. I, Nr. 35, 2).

Aufserdem haben wir aber für die folgenden Betrachtungen noch einen weiteren Satz abzuleiten, der dem in Nr. 424 entwickelten Mittelwertsatze in mancher Beziehung analog ist, und der als der „zweite" oder der „DuBoissche Mittelwertsatz" bezeichnet wird.

4. Der DuBoissche Mittelwertsatz. *Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei integrierbare Funktionen, von denen die eine, $f(x)$, im Intervalle (x_0, X) nicht wächst und positiv bleibt, so ist*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\Theta(X-x_0)} \varphi(x)\,dx.$$

Dabei bedeutet in dem Integrale der rechten Seite die obere

Grenze $x_0 + \theta(X - x_0)$ *einen Wert im Innern oder an den Grenzen des Intervalles* (x_0, X).

Wir betrachten einerseits die Summe

$$Pd = [f(x_0)\,\varphi(x_0) + f(x_1)\,\varphi(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1})]\, d,$$

in welcher $d = \frac{X - x_0}{n}$ ist, und $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$ die Anfangspunkte der n Intervalle von der Länge d bedeuten; andrerseits die Reihe der Werte

$$S_0 = \varphi(x_0),\quad S_1 = \varphi(x_0) + \varphi(x_1),\quad S_2 = \varphi(x_0) + \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$
$$S_{n-1} = \varphi(x_0) + \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_{n-1}),$$

deren gröfster mit G und deren kleinster mit g bezeichnet werden möge. Alsdann ist

$$\varphi(x_0) = S_0,\quad \varphi(x_1) = S_1 - S_0,\quad \varphi(x_2) = S_2 - S_1, \cdots$$
$$\varphi(x_{n-1}) = S_{n-1} - S_{n-2}$$

und daher

$$P = f(x_0)S_0 + f(x_1)(S_1 - S_0) + \cdots + f(x_{n-1})(S_{n-1} - S_{n-2})$$
$$= S_0(f(x_0) - f(x_1)) + S_1(f(x_1) - f(x_2)) + \cdots + S_{n-1}\cdot f(x_{n-1}).$$

Da nun aber nach unserer Annahme die Werte $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_{n-1})$ eine niemals zunehmende Reihe bilden, so sind die hier als Koeffizienten der S auftretenden Differenzen sämtlich $\geqq 0$ und es wird

$$P \leqq G(f(x_0) - f(x_1)) + G(f(x_1) - f(x_2)) + \cdots + Gf(x_{n-1}) = Gf(x_0)$$

und

$$\geqq g(f(x_0) - f(x_1)) + g(f(x_1) - f(x_2)) + \cdots + gf(x_{n-1}) = gf(x_0),$$

also

$$Gf(x_0) \geqq P \geqq gf(x_0).$$

Nun sind die Produkte $S_0 d, S_1 d, \cdots S_{n-1} d$, wenn man n hinreichend grofs und damit d hinreichend klein annimmt, von den entsprechenden Integralen

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx,\quad \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x)\,dx,\quad \cdots \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$$

nur um eine beliebig kleine Gröfse σ unterschieden, also zwischen $M + \sigma$ und $m - \sigma$ enthalten, wenn M den gröfsten und m den kleinsten Wert bezeichnet, welchen das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$$

für irgend ein x des Intervalles (x_0, X) annimmt. Es ist also auch

$$M + \sigma > Gd \geqq gd > m - \sigma$$

und daher

$$f(x_0)(M+\sigma) > [f(x_0)\varphi(x_0) + f(x_1)\varphi(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\varphi(x_{n-1})]\,d$$
$$> f(x_0)(m - \sigma).$$

Wenn man hier n unbegrenzt wachsen und gleichzeitig σ nach Null abnehmen läfst, so ist an der Grenze:

$$f(x_0)\,M \geqq \int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqq f(x_0)\,m.$$

Daraus folgt, dafs es einen zwischen M und m gelegenen Wert giebt, welcher mit $f(x_0)$ multipliziert gleich dem gegebenen Integrale ist; dieser Wert mufs, da $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ eine stetige Funktion von x ist, auch unter den Werten enthalten sein, welche dieses Integral annimmt, wenn x das Intervall von x_0 bis X durchläuft. Sonach besteht die zu beweisende Gleichung

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\theta(X-x_0)} \varphi(x)\,dx.$$

Folgerungen. 1. Ist $f(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X positive Funktion, welche nicht abnimmt, so kehre man die Grenzen des Integrales um. Alsdann ist

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(X)\int_{X}^{X+\theta(x_0-X)} \varphi(x)\,dx,$$

also

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(X)\int_{X+\theta(x_0-X)}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

2. Ist $f(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X negative Funktion, welche nicht zunimmt, so ist $-f(x)$ eine positive Funktion, welche, während x das Intervall von x_0 bis X durchläuft, nicht abnimmt. Also ist

$$-\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = -f(X)\int_{X+\theta(x_0-X)}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

oder

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(X)\int_{X+\theta(x_0-X)}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

3. Ist $f(x)$ eine Funktion, welche im Intervalle von x_0 bis X nicht zunimmt, dagegen von einem positiven Werte zu einem negativen übergeht, so ist $f(x) - f(X)$ eine Funktion, welche durchaus positiv ist und nicht zunimmt. Also ist

$$\int_{x_0}^{X} [f(x) - f(X)]\, \varphi(x)\, dx = [f(x_0) - f(X)] \int_{x_0}^{x_0 + \theta(X - x_0)} \varphi(x)\, dx,$$

oder

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(x_0) \int_{x_0}^{x_0 + \theta(X - x_0)} \varphi(x)\, dx + f(X) \int_{x_0 + \theta(X - x_0)}^{X} \varphi(x)\, dx.$$

5. Stellung des Problems. Eine Funktion, die für das Intervall von a bis b definiert ist, kann stets so transformiert werden, daſs ihr Argument das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ durchläuft. Denn setzt man:

$$x = \pi \frac{2z - (a + b)}{b - a} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x(b - a) + \pi(a + b)}{2\pi},$$

so entspricht jedem Werte von z ein Wert von x, und wenn z das Intervall von a bis b durchläuft, erhält x alle Werte von $-\pi$ bis $+\pi$. Demnach können wir die Aufgabe auf die Form reduzieren: *Es sei im Intervalle von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ eine Funktion $f(x)$ willkürlich definiert, doch so, daſs sie mit Ausnahme einzelner Punkte, an denen sie bestimmte sprungweise Wertänderungen erleidet, stetig ist; kann diese Funktion durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden, und wie sind dann die Koeffizienten derselben zu bestimmen?*

Die richtige Methode, diese Frage, wenn auch nicht vollständig zu lösen, so doch für die wichtigsten Fälle zu erledigen, eröffnete Dirichlet (Crelles Journal, Bd. 4); er lehrte, daſs dieselbe nicht in der aufgestellten Form zu untersuchen ist, sondern in der umgekehrten Reihenfolge. Bildet man für die Funktion $f(x)$ die trigonometrische Reihe, bei welcher die Koeffizienten die von Fourier angegebene Integralform haben, nämlich:

$$(1) \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx, \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx,$$

so ist vor allem zu untersuchen, ob diese Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

bei jedem Werte von x konvergiert und den Wert $f(x)$ liefert. Alsdann läfst sich weiter fragen, ob dieselbe Funktion etwa noch durch andere trigonometrische Reihen darstellbar ist oder nicht.

6. Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe. Wir wenden uns zur Beantwortung des ersten Teiles und schicken den folgenden Satz voraus:

Ist $f(x)$ eine im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ endliche und integrierbare Funktion, so haben die Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad \textit{und} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

für $n = \infty$ den Grenzwert null.

Dabei ist selbstverständlich der Grenzprozefs so zu vollziehen, dafs zuerst bei endlichem Werte von n die Integrale ermittelt werden, und alsdann in den gewonnenen Ausdrücken n über jeden Betrag hinaus wächst. Bildet man das Integral:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - \frac{1}{2} A_0 - \sum_{k=1}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right]^2 dx,$$

in welchem die Koeffizienten A und B die oben [Gleich. (1)] definierten Werte haben, und n eine bestimmte beliebig grofse ganze Zahl bedeutet, so wird dasselbe gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx + \frac{\pi}{2} A_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
$$- 2 \sum_{k=1}^{k=n} \left[A_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx + B_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx \right],$$

also gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{\pi}{2} A_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2);$$

es besteht demnach die Gleichung:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - \frac{1}{2} A_0 - \sum_{k=1}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right]^2 dx \tag{2}$$
$$= \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{\pi}{2} A_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2),$$

welche für jeden endlichen noch so großsen Wert von n giltig ist. Die linke Seite dieser Gleichung ist nun bei jedem Werte von n eine positive Grösse, weil die Funktion unter dem Integrale ein Quadrat ist, mithin muss auch die rechte Seite stets positiv bleiben. Würden nun die Beträge der Grössen A_k und B_k bei noch so grossen Werten von k nicht nach null konvergieren, sondern immer wieder Werte erlangen, die um eine bestimmte endliche Grösse von null verschieden sind, so müsste die rechte Seite bei beliebig wachsenden Werten von n negativ werden. Man erkennt also, dass sich ein n finden lässt, von dem ab

$$\sum_{k=n}^{k=n+m} (A_k^2 + B_k^2)$$

kleiner bleibt als eine beliebig kleine Zahl δ, wie gross auch m werden mag, und dass folglich auch

$$|A_n| \quad \text{und} \quad |B_n|$$

schliesslich kleiner werden und bleiben als δ, d. h. dass

$$\lim A_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim B_n = 0$$

ist. Da die Funktion $f(x)$ willkürlich ist, so kann man sie insbesondere so wählen, dass sie in einem Teilintervalle a bis b der Strecke $-\pi$ bis $+\pi$ von null verschieden ist, ausserhalb derselben aber null ist. Man erkennt dann, dass auch

$$\lim \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \quad \text{und} \quad \lim \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

$(-\pi \leqq a < b \leqq +\pi)$ für $n = \infty$ den Wert null haben. Desgleichen sieht man leicht ein: falls das Intervall von a bis b das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ umfasst, so kann man dasselbe in Teile zerlegen, die innerhalb der Strecken von $-\pi$ bis $+\pi$, von $+\pi$ bis $+3\pi$, von $-\pi$ bis -3π u. s. w. liegen, und da dann für jede dieser Strecken die Grenzwerte der Integrale null werden, so gilt der Satz noch allgemeiner als unsere anfängliche Behauptung: *Für jede überall endliche und integrierbare Funktion werden in einem beliebigen endlichen Integrationsintervalle von a bis b die Grenzwerte der Integrale*

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx \quad \textit{und} \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

gleich null, wenn n die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend über jeden Betrag hinaus wächst.

Bemerkung. Der Beweis bleibt giltig, falls $f(x)$ eine integrierbare Funktion ist, die derart unendlich wird, dass auch ihr

Quadrat integrierbar ist; und der Satz selbst bleibt bestehen, wenn die Funktion absolut integrierbar ist. Es giebt aber auch integrierbare Funktionen, welche derart unendlich werden, daſs die Gröſsen A_n und B_n nicht nach null konvergieren; für diese ist die Anwendbarkeit der Fourierschen Reihe ausgeschlossen. Das Verschwinden der Grenzwerte der Integrale A_n und B_n ist in anderer gleichfalls sehr einfacher Weise von Riemann bewiesen worden (Ges. Werke, pag. 240) und zwar direkt aus den Eigenschaften einer integrierbaren Funktion $f(x)$ und dem Umstande, daſs die Funktionen $\sin nx$ und $\cos nx$ in Intervallen von der Gröſse $\frac{2\pi}{n}$ ihr Zeichen wechseln.

7. Summation der endlichen Reihe. Soll die Fouriersche Reihe bei jedem Werte von x den Wert der Funktion $f(x)$ ausdrücken, so muſs die Summe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha + \sin kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\,d\alpha$$

bei beliebig wachsendem Werte von n sich unbegrenzt dem Werte $f(x)$ nähern. Wir bezeichnen die Summe dieser Glieder bis einschlieſslich derer mit dem Index n durch $S_n(x)$. Die Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cos 3(\alpha - x) + \cdots + \cos n(\alpha - x)$$

läſst sich durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen; nennt man der Kürze halber s die Summe:

$$s = \cos z + \cos 2z + \cos 3z + \cdots + \cos nz,$$

so folgt, wenn man beide Seiten mit $2\cos z$ multipliziert und die Produkte der Kosinus in Summen verwandelt:

$$\begin{aligned}2s\cos z &= (1 + \cos 2z) + (\cos 3z + \cos z) + (\cos 4z + \cos 2z) + \cdots \\ &\qquad + [\cos(n+1)z + \cos(n-1)z] \\ &= 1 + \cos z + 2\cos 2z + 2\cos 3z + \cdots + 2\cos(n-1)z + \cos nz \\ &\qquad + \cos(n+1)z.\end{aligned}$$

Demnach wird:

$$2s(1 - \cos z) = -1 + \cos z + \cos nz - \cos(n+1)z$$

oder

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1 - \cos z)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}};$$

also ist:

$$\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\cdots+\cos n(\alpha-x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}$$

und

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha. \tag{3}$$

Es ist zu untersuchen, ob der Wert dieses Integrales bei beliebig wachsendem Werte von n nach $f(x)$ konvergiert. Dasselbe zerlegt sich in zwei Teile; es ist:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha.$$

Das zweite Integral konvergiert mit beliebig wachsendem Werte von n nach null. Denn wie im § 3 bewiesen wurde, konvergieren die einzelnen Teile:

$$\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \quad \text{und} \quad \sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$$

nach null. In dem ersten Integrale ist die zu integrierende Funktion an der Stelle $\alpha=x$ irregulär, weil der Nenner für diese Stelle null wird. Bestimmt man aber ein beliebig kleines Intervall von $\alpha=x-\delta$ bis $\alpha=x+\delta$ (wir betrachten dabei zunächst den Fall, dafs x innerhalb des Integrationsintervalles und nicht an den Grenzen desselben gelegen ist), so ist die Funktion:

$$f(\alpha)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}$$

aufserhalb desselben durchaus endlich, und mithin konvergiert auch:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x-\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{x+\delta}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha$$

bei beliebig wachsendem Werte von n nach null. Also ist nur noch der Grenzwert des Integrales

$$S_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha \tag{4}$$

zu betrachten, und damit ist zugleich der Satz bewiesen:

Der Wert der Fourierschen Reihe hängt an jeder Stelle nur ab von dem Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Umgebung dieser Stelle.

Bemerkung. Der Satz gilt überhaupt, sobald die Funktion $f(x)$, auch wenn sie im Intervalle unendlich wird, die Eigenschaft hat, daſs

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$$

null werden, d. h. sobald diese zur Bildung der Fourierschen Reihe unerläſslichen Bedingungen erfüllt sind.

8. Grenzwert der Summe. Wir setzen nun in dem Integrale S_n', $\alpha - x = \beta$, $d\alpha = d\beta$, so daſs es die Form erhält:

$$S_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} f(x+\beta)\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}d\beta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}d\beta.$$

Der Grenzwert dieses Integrales, in welchem δ eine beliebig klein anzunehmende Gröſse bezeichnet, für $n = \infty$ entscheidet über den Wert der Reihe an der Stelle x.

Auch dieses Integral kann man noch vereinfachen. Bildet man das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{\beta}\right)\sin n\beta\, d\beta,$$

so hat dasselbe zufolge des früheren Satzes in Nr. 3 den Grenzwert null; denn die mit $\sin n\beta$ multiplizierte Funktion bleibt auch für $\beta = 0$ endlich. Mithin folgt, wenn

$$S_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\sin n\beta\, d\beta$$

für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwert hat, so hat auch

$$(5) \qquad F_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}d\beta$$

für $n = \infty$ denselben Grenzwert, und umgekehrt. Demnach lautet das Ergebnis:

Die Fouriersche Reihe hat an der Stelle x einen bestimmten Grenzwert, falls das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

für $n=\infty$ einen bestimmten Wert besitzt, und zwar ist der Grenzwert dieses Integrales zugleich der Wert der Reihe an der Stelle x.

Handelt es sich um den Wert $x=+\pi$ oder $x=-\pi$, so lehrt dieselbe Betrachtungsweise, daſs man aus der Summe $S_n(x)$ in beiden Fällen nur die Grenzwerte der Terme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha-\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin n(\alpha-\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}\,d\alpha$$

zu betrachten hat; also den Grenzwert des Integrales

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(+\pi-\beta)+f(-\pi+\beta)]\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(+\pi-\beta)+f(-\pi+\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

9. Hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion. Die Funktion $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ konvergiert für $\beta=0$ nach dem Werte $f(x+0)+f(x-0)$, da wir angenommen haben, daſs unsere Funktion $f(x)$ allenthalben bestimmte Werte $f(x+0)$ und $f(x-0)$ besitzt. An einer Stelle, an welcher die Funktion stetig ist, sind diese Werte einander gleich, an den Unstetigkeitsstellen sind sie verschieden. Setzt man die Differenz:

$$(6)\quad [f(x+\beta)+f(x-\beta)]-[f(x+0)+f(x-0)]=\lambda(\beta),$$

so ist $\lambda(\beta)$ eine stetige Funktion, welche für $\beta=0$ den Wert 0 hat, und es wird:

$$\lim S_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\lim\int_0^\delta\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta+\frac{1}{\pi}\lim\int_0^\delta\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Es ist nun:

$$\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \int_0^{n\delta} \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

also (Nr. 487, Gl. (8)):

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lim_{n=\infty} \int_0^{n\delta} \frac{\sin z}{z}\,dz = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

Mithin wird:

$$\lim S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] + \frac{1}{\pi} \lim \int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Der Wert der Fourierschen Reihe wird also an einer Stelle, wo die Funktion stetig ist, gleich $f(x)$, und an einer Stelle, wo die Funktion eine sprungweise Wertänderung erleidet, gleich dem Mittel aus beiden Grenzwerten, wenn

$$\lim \int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

bei noch so grofsen Werten von n durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden kann.

Es ist bisher nur gelungen, Bedingungen für das Verhalten der Funktion $\lambda(\beta)$ anzugeben, welche hinreichend sind, damit diese Forderung erfüllt ist, und es ist durch Beispiele bewiesen worden, dafs die Voraussetzung der *Stetigkeit* der Funktion $f(x)$ oder allgemeiner der Funktion $\lambda(\beta)$ für sich allein *nicht* genügt. Ich führe im folgenden nur die für die Anwendung der Fourierschen Reihe wichtigsten Fälle an.

Erstens: Besitzt die stetige Funktion $\lambda(\beta)$, welche für $\beta = 0$ verschwindet, in der Umgebung der Stelle $\beta = 0$ nicht unendlich viele Maxima und Minima, so kann man nach dem zweiten Mittelwertsatze (Nr. 4) schliefsen:

$$\int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta) \int_{\theta\delta}^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta) \int_{n\theta\delta}^{n\delta} \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Denn man kann das Intervall δ so klein machen, dafs die Beträge der Funktion $\lambda(\beta)$ nur wachsen, während β das Intervall von 0 bis δ durchläuft. Nun läfst sich aber δ von vornherein so klein wählen, dafs $\lambda(\delta)$ beliebig klein ist; ferner ist das Integral rechts, wie grofs auch n werden und welchen Wert auch θ haben mag, stets endlich. Also ist der Wert des Integrales

$$\int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta$$

unabhängig von n, lediglich durch Wahl von δ beliebig klein, d. h. es wird

$$\lim S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Insbesondere gilt das Resultat auch dann, wenn die Funktion $f(x)$ zu beiden Seiten der betrachteten Stelle nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, denn dann läfst sich die Funktion $\lambda(\beta)$ in die beiden Teile $f(x+\beta) - f(x+0)$ und $f(x-\beta) - f(x-0)$ zerlegen, und auf jeden derselben kann der nämliche Schlufs angewandt werden. (Bedingung von Dirichlet.)

Zweitens: Sind die Beträge (absoluten Werte) der Funktion $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ integrabel in der Umgebung der Stelle $\beta = 0$, so heifst die Funktion „*absolut integrierbar*", und es ist:

$$\int_0^\delta \frac{\lambda(\beta)}{\beta} \sin n\beta \, d\beta \text{ dem Betrage nach kleiner als } \int_0^\delta \left|\frac{\lambda(\beta)}{\beta}\right| d\beta.$$

Dieses Integral kann der Voraussetzung nach durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden, wodurch wiederum die Konvergenz der Reihe nach dem gewünschten Werte bewiesen ist.

Ist insbesondere $\lambda(\beta)$ dem Betrage nach stets kleiner als das Produkt $C\beta^\alpha$, wobei C eine Konstante, α irgend eine positive Zahl ist, so ist die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit erfüllt. (Bedingung von Lipschitz.)

Hieraus folgt: wenn die Funktion

$$(6') \qquad \frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \frac{f(x+\beta) - f(x+0)}{\beta} + \frac{f(x-\beta) - f(x-0)}{\beta}$$

endlich bleibt auch für $\beta = 0$, was besonders dann der Fall ist, wenn die Funktion $f(x)$ an der betrachteten Stelle einen bestimmten endlichen Wert des vorwärts gebildeten und ebenso des rückwärts gebildeten Differentialquotienten besitzt, so konvergiert die Fouriersche Reihe an dieser Stelle nach dem Werte

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Drittens: Das letzte Resultat, dafs die Reihe allenthalben konvergent ist, wenn für die Funktion $f(x)$ der vorwärts- und der rückwärtsgebildete Differentialquotient allenthalben endlich sind, läfst sich noch verallgemeinern. Es genügt, dafs der Differentialquotient der Funktion $f(x)$, auch wenn er unendlich wird, doch absolut integrierbar sei. Denn es besitzt alsdann die Funktion $\lambda(\beta)$

eine absolut integrierbare Ableitung: $\lambda'(\beta) = f'(x+\beta) - f'(x-\beta)$, und es wird nach dem Satze der teilweisen Integration:

$$\int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha) d\alpha \int_\alpha^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha) d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Wenn nun die absoluten Werte der Funktion $\lambda'(\alpha)$ integrierbar sind, so ist:

$$\left| \int_0^\delta \lambda'(\alpha) d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin z}{z} dz \right| < \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz \cdot \int_0^\delta |\lambda'(\alpha)| d\alpha,$$

denn nimmt man das Integral $\int \frac{\sin z}{z} dz$ zwischen irgend zwei positiven Grenzen, so ist sein absoluter Wert nie gröſser (Nr. 471) als:

$$\int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz.$$

Die rechte Seite kann nun durch Wahl von δ von vornherein beliebig klein gemacht werden, ganz unabhängig von n, daher ist auch

$$\int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta$$

durch Wahl von δ bei allen Werten von n beliebig klein, womit wiederum die Konvergenz bewiesen ist. (Bedingung von du Bois-Reymond.)

Als das für die Anwendung der Fourierschen Reihe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtigste Resultat heben wir hervor, daſs jede im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ irgendwie definierte Funktion, deren Ableitung entweder endlich und integrierbar, oder absolut integrierbar ist (an den Sprungstellen der Funktion sind immer die vor- und rückwärts gebildeten Ableitungen gesondert zu betrachten), durch eine allenthalben konvergente Fouriersche Reihe darstellbar ist, derart, daſs an den Sprungstellen der Funktion die Reihe den mittleren Wert annimmt. Dadurch allein schon erhält diese Reihenentwickelung eine besonders wichtige Bedeutung im Vergleich mit den gewöhnlichen Potenzreihen; denn diese setzen die Stetigkeit nicht nur der ersten, sondern überhaupt aller Ableitungen voraus.

Endlich bemerken wir noch, daſs an den Stellen $x = +$ oder $-\pi$ die Reihe nach dem Werte $\frac{1}{2}[f(+\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$ konvergiert, sobald die Funktion an den Stellen $x = \pm\pi$ eine

der drei Bedingungen erfüllt. Ist also die willkürliche Funktion so beschaffen, dafs ihre Werte an den beiden Grenzen des Intervalles verschieden sind, so kann durch die Fouriersche Reihe immer nur der mittlere Wert dieser beiden ausgedrückt werden.

Bemerkung. Wird die Funktion $f(x)$ an einzelnen Stellen unendlich, so jedoch, dafs die notwendigen Bedingungen (§ 3) erfüllt sind, so konvergiert die Fouriersche Reihe sicherlich an jeder anderen Stelle, welche eine der drei entwickelten Bedingungen erfüllt. Wie sie sich an der Unendlichkeitsstelle verhält, ist eine minder wichtige Frage, sie kann dort möglicherweise sogar konvergieren, doch stellt sie dann mit diesem Werte nicht die Funktion dar. Ferner erkennt man, dafs punktuell hebbare Unstetigkeiten der Funktion $f(x)$ gar keinen Einflufs haben auf die Reihe und daher auch niemals durch dieselbe dargestellt werden.

10. Stellung eines neuen Problems. Der Beweis, welchen wir geführt haben, giebt uns Bedingungen an, unter denen die Fouriersche Reihe nach dem Werte $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ konvergiert. Es ist daher die Frage nicht ohne Bedeutung, ob die Reihe an einer bestimmten Stelle x nicht auch konvergieren kann, ohne dafs sie gerade diesen Wert annimmt. Die Antwort aber lautet: *Wenn die Fouriersche Reihe an einer Stelle konvergiert, an welcher $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ einen bestimmten Wert hat, so konvergiert sie auch immer nach diesem Werte.* Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich, wenn man zuvor auf zwei allgemeine Eigenschaften der *trigonometrischen Reihen überhaupt* eingeht, von denen die eine im wesentlichen von Herrn G. Cantor, die andere von Riemann aufgestellt wurde. Dieselben sind zugleich wichtig für die Beantwortung der Frage: Ist jede trigonometrische Reihe, welche eine Funktion $f(x)$ definiert, eine Fouriersche? Man erkennt von vornherein die Beschränkung des Satzes: Die Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe definiert ist, mufs, falls die Koeffizienten der Reihe die Fouriersche Integralform haben sollen, jedenfalls eine integrierbare sein. Sonach kommen wir auf das in der Nr. 492 ff. nur unter einer bestimmten Annahme gelöste Problem:

Haben in jeder trigonometrischen Reihe:

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),$$

wenn sie im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ eine Funktion $f(x)$

definiert, welche integrierbar ist, die Koeffizienten A_n und B_n die Werte:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx?$$

Diese Frage ist im wesentlichen zu bejahen. Der Weg zu ihrer Beantwortung ist von Herrn du Bois-Reymond zuerst angegeben worden. Im folgenden soll der Beweis geführt werden unter der Einschränkung, dafs $f(x)$ zugleich eine im allgemeinen stetige Funktion ist, d. h. eine solche, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Wertänderung erleidet.

11. Verallgemeinerung des Satzes der Nr. 6. Wenn eine trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$$

überhaupt in einem noch so kleinen Intervalle konvergieren soll, so mufs sie notwendig die Eigenschaft haben, dafs $\lim A_n$ und $\lim B_n$ für $n = \infty$ verschwinden. Diesem von Hrn. Cantor aufgestellten Satze (Math. Annal. Bd. 4 u. 5) können wir eine erweiterte Fassung geben, indem wir folgende allgemeine Erkenntnis über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen voranstellen. Die Stellen, an denen eine unendliche Reihe divergiert, können von zweierlei Art sein. Entweder wächst die Summe der Reihenglieder über jede Grenze, die Reihe wird alsdann an dieser Stelle in bestimmter oder unbestimmter Weise unendlich, oder es oscillieren die Werte dieser Summe zwischen endlichen Grenzen. Im ersten Falle kann das Mafs der Divergenz ein unendliches genannt werden, im zweiten läfst sich ein endliches Mafs fixieren. Denn bezeichnet man mit S_{n-1} die Summe der Glieder, welche den Index $0, 1, \cdots$ bis $n-1$ besitzen, und bildet man die Folge $S_{n-1}, S_n, S_{n+1}\cdots$, so existiert eine obere Grenze G_n und eine untere g_n, welche von den Gliedern in dieser Folge nicht überschritten wird. Läfst man den Index n beliebig wachsen, so erhält G_n, indem es entweder konstant bleibt oder nur abnimmt, einen Grenzwert G', und ebenso bekommt g_n, indem es entweder konstant bleibt oder nur zunimmt, einen Grenzwert g'. Diese Werte G' und g' sind alsdann die äufsersten Grenzen für die schliefsliche Oscillation der Reihensumme und ihre Divergenz soll das Mafs der Divergenz an der betrachteten Stelle heifsen. Ist dieses Divergenzmafs null, so konvergiert die Reihe daselbst. Bezeichnet man die Differenz $S_{n+k} - S_n$ mit $R_{n,k}$, so hat die Folge der Reste $R_{n,1}, R_{n,2}\cdots$ die Eigenschaft, dafs ihr Betrag

niemals gröfser sein kann als $G_n - g_n$. Wird also das Divergenzmafs schliefslich kleiner als eine Zahl d, so kann man eine Stelle n ausfindig machen, von der ab die Beträge sämtlicher Reste $R_{n,k}$ unabhängig von k stets kleiner bleiben als d. Eine Reihe soll in einem Intervalle *im allgemeinen konvergent* heifsen, wenn alle die Stellen, an denen das Divergenzmafs gröfser ist als eine bestimmte, beliebig zu fixierende Zahl δ in keinem noch so kleinen Teilintervalle überall dicht sind. Dies besagt, dafs man in unmittelbarer Nähe einer jeden Stelle ein Intervall bestimmen kann, so dafs für sämtliche Stellen in diesem Intervalle das Divergenzmafs gleich oder kleiner ist als δ. Der Satz, welchen wir beweisen wollen, lautet nun: *Eine trigonometrische Reihe, welche in einem beliebigen Intervalle im allgemeinen konvergent ist, mufs schliefslich verschwindende Koeffizienten haben, d. h. es mufs* $\lim A_n = 0$ *und* $\lim B_n = 0$ *werden.*

Eine trigonometrische Reihe, für welche die Koeffizienten A_n und B_n nicht verschwindende Grenzwerte haben, kann zwar auch bei unendlich vielen Werten von x konvergieren, es giebt aber in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen, an denen sie divergiert, und zwar mit einem Divergenzmafse, das gröfser ist als eine bestimmte endliche Zahl.

An jeder Stelle, wo das Divergenzmafs kleiner wird als δ, kann man eine untere Grenze für den Index n bestimmen, so dafs sämtliche Reihenglieder, deren Index gleich oder gröfser als n ist, dem Betrage nach kleiner werden als δ. Da nun die Punkte, an denen das Divergenzmafs gröfser ist als δ, in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sein sollen, so kann man in unmittelbarer Nähe einer jeden Stelle ein Teilintervall bestimmen, in welchem kein Punkt liegt, an dem das Divergenzmafs gröfser ist als δ. Solch ein Intervall habe die Länge 2ε und erstrecke sich von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$.

Man kann dann also einen Wert für n bestimmen, so dafs für diesen sowie für alle gröfseren Werte die Glieder:

$$A_n \cos n(x + \varepsilon) + B_n \sin n(x + \varepsilon)$$
$$= (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon - (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon,$$
$$A_n \cos n(x - \varepsilon) + B_n \sin n(x - \varepsilon)$$
$$= (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon + (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon$$

beide dem Betrage nach um eine bestimmte Gröfse kleiner werden als δ. Es bedeutet dabei x einen Wert in beliebiger Nähe einer jeden Stelle, ε irgend einen Wert innerhalb des konstruierten Intervalles. Zu jedem Werte von ε kann eine andere Grenze für n gehören; es ist noch nicht gesagt, dafs bei jedem Werte von ε derselbe Wert von n ausreicht.

Durch Addition und Subtraktion der beiden vorstehenden Gröfsen erkennt man, dafs auch jede der Gröfsen

$$(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon \quad \text{und} \quad (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon$$

jedenfalls kleiner sein mufs als 2δ. Multipliziert man die erste Gleichung mit $\sin nx \sin n\varepsilon$, die zweite mit $\cos nx \cos n\varepsilon$, so findet man durch Subtraktion, dafs $B_n \sin 2n\varepsilon$ und analog, dafs $A_n \cos 2n\varepsilon$ kleiner werden als $4\delta = \delta'$, also kurz gesagt kleiner gemacht werden können als eine beliebig vorgegebene Zahl δ'. Setzt man $2\varepsilon = \alpha$, so wird also für alle Werte von α in einem bestimmten Intervalle, dessen Grenzen wir mit a und b bezeichnen wollen, $\lim B_n \sin n\alpha$ und $\lim A_n \cos n\alpha$ kleiner als δ'. Für jeden Wert von α innerhalb des angegebenen Intervalles mufs also die Reihe:

$$[B_n \sin n\alpha], \cdots [B_{n+k} \sin (n+k)\alpha], \cdots$$

schliefslich nur Glieder enthalten, deren Betrag kleiner ist als δ', und dies kann, wie nun bewiesen werden soll, nicht anders erfüllt sein, als wenn für einen bestimmten Wert von n an sämtliche Koeffizienten

$$[B_n], \quad [B_{n+1}], \cdots [B_{n+k}], \cdots$$

dem Betrage nach kleiner sind als δ'.

Denn nehmen wir an, dafs dieses nicht der Fall ist, so kann man aus dieser Reihe eine andere herausheben:

$$B_{n_1}, B_{n_2}, \cdots B_{n_k}, \cdots,$$

deren Glieder sämtlich gleich oder gröfser sind als δ'. Dann liefse sich aber auch in dem angegebenen Intervall ein Wert α fixieren, für welchen $\lim [B_n \sin n\alpha]$ nicht kleiner wird als δ', Aus der Reihe der wachsenden, ganzen Zahlen $n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots$ hebe man eine neue Reihe heraus: $n_1', n_2', \cdots n_k', \cdots$ so dafs die Produkte $n_1'\alpha$, $n_2'\alpha$, $\cdots n_k'\alpha \cdots$ insgesamt von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ um weniger als eine beliebig kleine Gröfse η abweichen. Wenn dieses möglich ist, so differiert auch $\sin n'\alpha$ beliebig wenig von dem Werte ± 1, und also der Betrag von $B_{n'} \sin n'\alpha$ beliebig wenig von einem Werte, der gleich oder gröfser ist als δ'.

Man setze:

$$n_1 \alpha > y_1 \frac{\pi}{2} - \eta \quad \text{und} \quad n_1 \alpha < y_1 \frac{\pi}{2} + \eta$$

oder:

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1} < \alpha < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1};$$

y_1 bezeichnet eine ganze ungerade, zunächst noch unbestimmte Zahl. Der Wert von α fällt in das gegebene Intervall von a bis b, wenn:

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1}, \qquad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1}$$

ist, oder

$$(n_1 a + \eta) \frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1 b - \eta) \frac{2}{\pi}.$$

Dieses Intervall enthält sicherlich eine ungerade Zahl y_1, wenn

$$[n_1(b-a) - 2\eta] \frac{2}{\pi} \geqq 2, \quad \text{also} \quad n_1 \geqq \frac{\pi + 2\eta}{b-a}$$

gewählt ist. Durch diese Forderung ist nur eine untere Grenze für die zu bildende Reihe n' fixiert, und in diesem Umstande liegt der Kern des ganzen Beweises. Hat man also aus der Reihe $n_1, n_2, \cdots$ die Zahl n_1' und demgemäſs y_1 diesen Ungleichungen entsprechend fixiert, so ist α auf das Intervall beschränkt, das kurz mit

$$a' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1'}, \qquad b' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1'}$$

bezeichnet sei und die Länge $\frac{2\eta}{n_1'}$ hat. In diesem Intervalle können wir nun wiederum α so aussuchen, daſs für einen Wert n_2', welcher gröſser ist als n_1' und in der Reihe $n_1, n_2, \cdots n_k \cdots$ vorkommt, die Ungleichung besteht:

$$\frac{y_2 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_2'} < \alpha < \frac{y_2 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_2'}.$$

Die ungerade Zahl y_2 muſs der Bedingung genügen:

$$(n_2' a' + \eta) \frac{2}{\pi} < y_2 < (n_2' b' - \eta) \frac{2}{\pi},$$

und dieses Intervall enthält sicherlich eine ungerade Zahl, sobald:

$$[n_2'(b'-a') - 2\eta] \frac{2}{\pi} \geqq 2 \quad \text{oder} \quad n_2' \geqq \left(\frac{\pi + 2\eta}{b'-a'} = \frac{\pi + 2\eta}{2\eta} n_1'\right)$$

gewählt ist. Auf diese Weise erhalten wir nun eine untere Grenze, nach welcher n_2' aus der ursprünglichen Reihe $n_1, n_2, \cdots$ zu wählen ist, und nachdem y_2 der obigen Ungleichung gemäſs fixiert ist, bleibt der Wert von α noch innerhalb eines Intervalles von der Länge $\frac{2\eta}{n_2'}$ willkürlich. In diesem Intervalle kann man ein neues bestimmen, so daſs für eine Zahl $n_3' > n_2'$ das Produkt $n_3'\alpha$ von einem ungeraden Vielfachen y_3 von $\frac{\pi}{2}$ um weniger als ε differiert,

und indem man diesen Prozefs fortsetzt, gewinnt man als Grenze eine Stelle α, für welche:

$$n_1'\alpha, \; n_2'\alpha, \; n_3'\alpha, \cdots$$

der aufgestellten Forderung stets genügt, so dafs auch die Beträge von

$$B_{n_1'} \sin n_1'\alpha, \quad B_{n_2'} \sin n_2'\alpha, \quad B_{n_3'} \sin n_3'\alpha, \cdots$$

um eine beliebig kleine Gröfse von δ' unterschieden sind. Es wird also $\lim B_n \sin n\alpha$ nicht um eine bestimmte Gröfse kleiner als δ', d. h. die Reihe müfste in jedem noch so kleinen Intervalle ein Divergenzmafs besitzen, das gleich oder gröfser ist als δ'; sie wäre dann nicht unserer Definition entsprechend im allgemeinen konvergent. In derselben Weise ist der Beweis für die Koeffizienten A_n zu führen.

Soll eine Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe definiert ist, zugleich auch integrierbar sein, so mufs diese Reihe auch im allgemeinen konvergieren. Denn anderen Falles würde die Funktion $f(x)$ in jedem kleinsten Intervalle unbestimmt werden, und die Schwankungen der Funktion, d. h. die Differenz der verschiedenen Werte, welche man an solch einer Stelle durch fortgesetzte Summation der Reihenglieder erhält, bliebe dabei gröfser als eine endliche Zahl δ'. Bei einer integrierbaren Funktion aber müssen alle die Stellen, an denen die Schwankungen gröfser sind als eine endliche Zahl δ', sich in Intervalle einschliefsen lassen, deren Summe beliebig klein wird, sie können also nicht überall dicht über ein noch so kleines endliches Intervall verteilt sein. Sonach hat man den Satz: *In jeder trigonometrischen Reihe werden, wenn sie eine integrierbare Funktion definiert, die Koeffizienten zuletzt unendlich klein, d. h. es ist* $\lim A_n = 0$ *und* $\lim B_n = 0$ *für* $n = \infty$.

12. Zweimalige Integration der Fourierschen Reihe. Die zweite von Riemann (Ges. Werke, pag. 231 ff.) erkannte Eigenschaft einer jeden trigonometrischen Reihe, deren Koeffizienten zuletzt unendlich klein werden, ist die folgende:

Bildet man aus der Reihe:

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

deren Wert an jeder Stelle, wo sie konvergiert, mit $f(x)$ bezeichnet sei, durch zweimalige gliedweise Integration die Reihe:

$$\frac{1}{4} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

so konvergiert diese Reihe bei allen Werten von x und stellt im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ eine stetige Funktion $F(x)$ dar. Diese stetige Funktion hat erstlich die Eigenschaft, dafs:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x)$$

wird bei allen Werten von x, an denen $f(x)$ einen bestimmten Wert hat, und dafs dieser Grenzwert jedenfalls innerhalb der Schwankungen des Reihenwertes liegt an einer Stelle, an welcher die Reihe divergiert; ferner die Eigenschaft, dafs:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha} = 0$$

wird bei allen Werten von x.

Die Konvergenz der neuen Reihe und ihre Stetigkeit erkennt man, wenn man die Summe aller Glieder bis einschliefslich derer mit dem Index n durch N, den Rest der Reihe, d. h.

$$-\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

mit R, und den gröfsten Wert von $A_k \cos kx + B_k \sin kx$ für $k > n$ mit ε bezeichnet. Alsdann bleibt der Betrag des Restes offenbar kleiner als:

$$\varepsilon\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\right] < \frac{\varepsilon}{n},$$

und kann also in beliebig kleine Grenzen eingeschlossen werden, wenn man nur n hinreichend grofs nimmt. Die trigonometrische Reihe ist demnach bei allen Werten von x eine gleichmäfsig konvergente, und daraus folgt dann auch, dafs $F(x)$ stetig ist. Denn man kann die Differenz $F(x+\Delta x) - F(x)$ beliebig klein machen, wenn man zuerst n so grofs wählt, dafs R, welche Werte auch x und $x+\Delta x$ haben mögen, beliebig klein ist, und alsdann Δx so fixieren, dafs auch die Differenz der Werte von N für x und $x+\Delta x$ beliebig klein ist.

Man bilde den Quotienten:

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Wenn nun:

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) = f(x)$$

ist, wobei $f(x)$ entweder einen bestimmten Wert bezeichnet oder einen unbestimmten Wert, der innerhalb des Wertevorrates der Reihensumme an der Stelle x liegt, so mufs sich, wenn man die Reihe:

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=n-1} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) = f(x) + \varepsilon_n$$

setzt, für eine beliebig gegebene Gröfse δ ein Wert m von n angeben lassen, so dafs, wenn $n > m$ wird, $\varepsilon_n < \delta$ wird. Wir nehmen nun α so klein an, dafs $m\alpha < \pi$ wird, und bringen ferner mittelst der Substitution

$$A_n \cos nx + B_n \sin nx = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$$

die obige Reihe auf die Form:

$$f(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right].$$

Diese Reihe teilen wir in drei Teile, indem wir

1. die Glieder vom Index 1 bis m einschliefslich,
2. die Glieder vom Index $m+1$ bis zur gröfsten unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegenden ganzen Zahl, welche s heifsen möge,
3. die Glieder vom Index $s+1$ bis ∞

zusammenfassen. Der erste Teil besteht aus einer endlichen Anzahl stetig sich ändernder Glieder und kann daher seinem Grenzwerte null beliebig genähert werden, indem man α hinreichend klein werden läfst; der zweite Teil ist, da der Faktor von ε_n beständig positiv ist, indem $\frac{\sin x}{x}$ in den ersten beiden Quadranten eine durchaus abnehmende Funktion ist, offenbar dem Betrage nach kleiner als:

$$\delta \left[\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right].$$

Im dritten Teile endlich zerlege man das allgemeine Glied in

$$\varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

und

$$\varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right] = -\, \varepsilon_n \frac{\sin (2n-1)\alpha \sin \alpha}{(n\alpha)^2},$$

so leuchtet ein, dafs dieses Glied kleiner ist als

$$\delta\left[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2}-\frac{1}{n^2\alpha^2}\right]+\delta\frac{1}{n^2\alpha},$$

und folglich die Summe von $n=s+1$ bis $n=\infty$ kleiner ist als

$$\delta\left[\frac{1}{s^2\alpha^2}+\frac{1}{s\alpha}\right].$$

Dieser Wert geht, da s die gröfste unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegende ganze Zahl bedeutet, für ein unendlich kleines α über in

$$\delta\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right].$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

nähert sich daher mit abnehmendem α einem Grenzwert, der nicht gröfser als

$$\delta\left[1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right]$$

sein kann, also da δ beliebig klein gemacht werden kann, null werden mufs, und folglich konvergiert

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2},$$

welches gleich

$$f(x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

ist, wenn α nach null konvergiert, gegen $f(x)$, womit die aufgestellte Eigenschaft bewiesen ist; $f(x)$ bedeutet dabei einen Wert innerhalb des Wertevorrates der ursprünglichen Reihe an der Stelle x, also, wenn die Reihe an dieser Stelle konvergiert, diesen Grenzwert selbst.

Es soll nun noch gezeigt werden, dafs

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{2\alpha}$$

null wird und zwar gleichmäfsig nach null konvergiert, d. h. bei allen Werten von x durch Wahl eines hinreichend kleinen Wertes von α kleiner gemacht werden kann als eine beliebig vorgegebene Zahl. Um dieses zu beweisen, teile man die Reihe

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

in drei Gruppen, von denen die erste alle Glieder bis zu einem festen Index m enthält, von dem an die Koeffizienten A_n und B_n immer kleiner als ε bleiben; die zweite alle folgenden Glieder, für welche $n\alpha$ gleich oder kleiner ist als eine feste Gröſse c, die dritte den Rest der Reihe umfaſst. Die Summe der ersten endlichen Gruppe bleibt endlich, d. h. sie ist bei allen Werten von x kleiner als eine endliche Zahl Q. Die Summe der zweiten Gruppe ist kleiner als

$$2\varepsilon \sum_{m+1}^{s} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Die Anzahl der Glieder in dieser Summe ist kleiner als s, und daher ist diese Summe kleiner als $2\varepsilon \frac{c}{\alpha}$. Die dritte Summe endlich ist kleiner als

$$2\varepsilon \sum_{s+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 < 2\varepsilon \sum_{s+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\alpha^2} < \frac{2\varepsilon}{\alpha c}.$$

Folglich bleibt

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{2\alpha} < 2\left[Q\alpha + 2\varepsilon\left(c + \frac{1}{c}\right)\right]$$

bei allen Werten von x, woraus der behauptete Satz folgt.

13. Der zweite mittlere Differentialquotient. Auf Grund des Ergebnisses in dem letzten Paragraphen hat man nun das Problem zu behandeln (du Bois-Reymond, Abhandlungen der k. bayerisch. Akad. der W., II. Kl., Bd. 12): Wenn man von einer in einem bestimmten Intervalle stetigen Funktion $F(x)$ weiſs, daſs ihr zweiter mittlerer Differentialquotient, nämlich:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$$

an jeder Stelle gleich ist einer integrierbaren Funktion $f(x)$, d. h. an allen Stellen, wo die Funktion $f(x)$ einen bestimmten Wert hat, ebenfalls diesen Wert besitzt, an denjenigen dagegen, wo $f(x)$ unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen ist, einen bestimmten oder unbestimmten Wert besitzt, der innerhalb der nämlichen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, kann man dann umgekehrt von der Funktion $F(x)$ behaupten, daſs sie sich durch zweimalige Integration aus $f(x)$ ableiten läſst, daſs also die Gleichung besteht:

$$F(x) = F_1(x) + Cx + C',$$

wobei

$$F_1(x) = \int_a^x f(y)\,(x-y)\,dy$$

C und C' bestimmte Konstanten sind, und α eine willkürlich fixierte Gröfse bezeichnet?

Die aufgeworfene Frage ist leicht zu entscheiden, wenn wir annehmen, dafs die Funktion $f(x)$ eine im allgemeinen stetige Funktion ist, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Unstetigkeit erleidet; für den allgemeinsten Fall, in dem von $f(x)$ nur bekannt ist, dafs es eine integrierbare Funktion ist, die also auch unendlich werden kann, ist die Beantwortung schwieriger.

14. Ein Hülfssatz. Wir stellen folgenden Hülfssatz voraus:

Weifs man von einer stetigen Funktion $\varphi(x)$, dafs innerhalb eines gegebenen Intervalles der zweite mittlere Differentialquotient an allen Stellen den Wert null hat, so ist $\varphi(x)$ eine lineare Funktion von x mit konstanten Koeffizienten.

Das gegebene Intervall erstrecke sich von $x = a$ bis $x = b$; man bilde:

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

und

$$\chi(x) = \pm\,\psi(x) - \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x),$$

wobei δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Es ist nun

$$\frac{\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \pm\,\frac{\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + \delta$$

ein Wert, der an jeder Stelle des für $\varphi(x)$ gegebenen Intevalles schliefslich positiv wird für $\Delta x = 0$, denn der Differenzenquotient der Funktion $\varphi(x)$ wird durch Wahl von Δx beliebig klein. Hieraus folgt, dafs die stetige Funktion $\chi(x)$, welche an den beiden Endpunkten des Intervalles a und b den Wert null hat, im Innern des Intervalles kein Maximum besitzen kann. Denn wenn x_1 eine Stelle bezeichnet, an welcher dieses Maximum liegt, so ist

$$\chi(x_1 + \Delta x) - \chi(x_1) \leqq 0, \qquad \chi(x_1 - \Delta x) - \chi(x_1) \leqq 0;$$

es wird dann

$$\chi(x_1 + \Delta x) - 2\chi(x_1) + \chi(x_1 - \Delta x) \leqq 0,$$

nicht aber positiv; daraus folgt, dafs die stetige Funktion $\chi(x)$ im ganzen Intervalle von a bis b nicht positiv werden kann; also ist:

$$\pm \psi(x) - \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < 0$$

oder:

$$\pm \psi(x) < \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < \frac{\delta}{2}(b-a)^2.$$

Da δ beliebig klein ist, so folgt hieraus, daſs auch der Betrag von $\varphi(x)$ beliebig klein wird, d. h. daſs

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{b-a}[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

ist.

15. Folgerung. Bezeichnet man nun die Differenz zwischen den im § 10 definierten Funktionen $F(x) - F_1(x)$ mit $\varphi(x)$, so ist:

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} - \lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2},$$

und es wird:

$$\frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x} [f(x+\alpha) + f(x-\alpha)](\Delta x - \alpha)\, d\alpha$$
$$= \frac{f(x+\theta\Delta x) + f(x-\theta\Delta x)}{2},$$

wenn man mit $f(x+\theta\Delta x)$ und $f(x-\theta\Delta x)$ mittlere Werte bezeichnet, welche innerhalb der Werte der Funktion $f(x)$ in den Intervallen von x bis $x+\Delta x$ und x bis $x-\Delta x$ gelegen sind. Betrachtet man zunächst solche Intervalle, in denen die Funktion $f(x)$ keine sprungweisen Wertänderungen erleidet, vielmehr durchaus stetig ist, so wird für jede Stelle in denselben:

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} - \lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2}$$
$$= f(x) - \lim \frac{f(x+\theta\Delta x) + f(x-\theta\Delta x)}{2},$$

also gleich null; mithin ist in jedem dieser Intervalle die Differenz

$$F(x) - F_1(x)$$

eine lineare Funktion: $Cx + C'$.

Betrachtet man aber ein Intervall, in welchem die Funktion $f(x)$ eine sprungweise Wertänderung erleidet, während sie zu beiden Seiten dieser Stelle stetig ist, so wird auch hier überall $\lim \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x^2}$ gleich null; denn an der Sprungstelle $x = c$ ist $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ gleich $\frac{1}{2}[f(c+0) + f(c-0)]$, und denselben Wert erhält auch $\lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2}$.

16. Anwendung auf die trigonometrische Reihe. Diese Ergebnisse führen zu dem Satze: Ist durch die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

eine im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ im allgemeinen stetige Funktion $f(x)$ definiert, welche nur an vereinzelten Stellen sprungweise Unstetigkeiten erleidet, so besteht bei allen Werten von x die Gleichung:

$$\frac{1}{4} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \int_{-\pi}^{x} f(y)(x-y)\,dy + Cx + C'.$$

Bezeichnet man das Integral auf der rechten Seite kurz mit $F_1(x)$, so folgt, weil die auf der linken Seite stehende Summe eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist:

$$F_1(x + 2\pi) + C(x + 2\pi) + C' - \frac{1}{4} A_0 (x + 2\pi)^2$$
$$= F_1(x) + Cx + C' - \frac{1}{4} A_0 x^2$$

oder

$$F_1(x + 2\pi) = F_1(x) - 2C\pi + A_0(x\pi + \pi^2),$$

und weil für $x = -\pi$ die Funktion $F_1(x)$ verschwindet, so ist

$$F_1(\pi) = -2C\pi.$$

Aus derselben Gleichung folgt, wenn man sie nach x differentiiert:

$$F_1'(x + 2\pi) = F_1'(x) + A_0\pi,$$

also für $x = -\pi$:

$$F_1'(\pi) = F_1'(-\pi) + A_0\pi = A_0\pi.$$

Da die neu gebildete Reihe eine gleichmäſsig konvergente ist, so kann sie gliedweis integriert werden. Man findet sonach die Relationen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + Cx + C'] \sin nx\,dx = -\frac{1}{n^2} B_n \pi,$$

denn es ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \sin nx\, dx = \left[\frac{-x^2 \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x \cos nx\, dx$$

$$= \left[\frac{-x^2 \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\, dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + Cx + C'] \cos nx\, dx = -\frac{1}{n^2} A_n \pi + (-1)^n \frac{A_0}{n^2}\pi,$$

denn es ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x \sin nx\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n^2}\left[\frac{x \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\, dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n.$$

Die Funktion $F_1(x)$ besitzt eine stetige Ableitung und sonach wird vermittelst teilweiser Integration das erste Integral gleich:

$$\left[-\frac{\cos nx}{n}[F_1(x) + Cx + C']\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1'(x) + C] \cos nx\, dx.$$

Aber auch dieses Integral läfst die teilweise Integration zu, weil $F_1'(x)$ stetig ist, und die integrierbare Ableitung $f(x)$ besitzt; demnach folgt:

$$-\frac{1}{n^2}B_n\pi = \left[-\frac{\cos nx}{n}[F_1(x) + Cx + C']\right]_{-\pi}^{+\pi} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}[F_1'(x) + C]\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$- \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Die Werte in den Klammern verschwinden, und man erhält:

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Sonach ist der Satz bewiesen: *Ist durch eine trigonometrische Reihe eine im allgemeinen stetige Funktion $f(x)$ definiert, welche nur an vereinzelten Stellen eine sprungweise Wertänderung besitzt, so ist die Reihe eine Fouriersche.*

Bemerkung. Um den Satz in seiner allgemeinsten Fassung zu beweisen, d. h. nur unter der Voraussetzung, dafs die Funktion $f(x)$, welche durch die trigonometrische Reihe definiert ist, integrierbar ist, woraus nach § 8 hervorgeht, dafs die Koeffizienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, mufs man wiederum den Nachweis führen, dafs die durch zweimalige gliedweise Integration aus der gegebenen abgeleiteten Reihe gleich

$$\int_{-\pi}^{x} f(y)\,(x-y)\,dy + Cx + C'$$

wird. Alsdann bleiben die weiteren Schlüsse des letzten Paragraphen bestehen. Zu dem Zwecke hat man den Satz zu beweisen: Wenn eine stetige Funktion die Eigenschaft hat, dafs ihr zweiter mittlerer Differentialquotient $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ gleich wird einer integrierbaren Funktion $f(x)$, die zugleich auch Stellen besitzen kann, an denen sie unendlich wird, so ist $F(x)$ durch zweimalige Integration aus $f(x)$ bis auf eine lineare Funktion darstellbar. Dieser Satz läfst sich in der That beweisen, wenn, was hier der Fall ist, die Bedingung hinzukommt, dafs $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x}$ allenthalben gleich null wird, und wenn noch die Voraussetzung gemacht wird, dafs die Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$ isoliert sind, oder nur eine „abzählbare" Menge bilden. (Math. Annal. Bd. 23, pag. 266, Bd. 24, pag. 246.)

Ebenso kann man den in Nr. 10 erwähnten Satz beweisen: Wenn eine Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten mit den Integralen einer Funktion $f(x)$ gebildet sind, schliefslich verschwindende Koeffizienten erhält, so stimmt der Wert der Reihe überall, wo sie konvergiert, mit dem Werte $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ überein, vorausgesetzt, dafs dies überhaupt ein bestimmter Wert ist, und an jeder Stelle, wo die ursprüngliche Reihe divergiert, jedoch mit endlichem Divergenzmafse, liegt der Wert von $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ innerhalb der Schwankungen der Reihe an dieser Stelle, oder die Unbestimmtheitsgrenzen dieses Ausdruckes fallen nicht aufserhalb der Schwankungen der Reihe.

Endlich kann man auch das allgemeine Theorem beweisen: Eine Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten zuletzt unendlich klein werden, definiert ist,

kann nicht durch eine andere von dieser verschiedene, trigonometrische Reihe dargestellt werden, wenn man von diesen beiden Reihen entweder verlangt, daſs sie bei allen Werten von x übereinstimmen sollen, oder auch nur, daſs ihre Differenz im allgemeinen null ist, und erstlich nur an Stellen, welche eine *diskrete* Menge bilden, endlich und dem Betrage nach gröſser ist als eine beliebig kleine endliche Zahl δ (resp. zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, deren Beträge gröſser sind als δ), zweitens nur an Stellen, welche eine *reduktible* Menge bilden, unendlich wird (resp. zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, deren Betrag unendlich groſs wird).

17. Die Fouriersche Integralformel. In Nr. 9 haben wir gewisse Bedingungen erkannt, unter denen eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ irgendwie definierte, integrierbare Funktion $f(x)$ durch eine Fouriersche Reihe von der Form:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha + \sin kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha\right]$$

dargestellt werden kann, so daſs bei jedem Werte von x innerhalb dieses Intervalles die Reihe entweder den Wert $f(x)$ oder den Wert $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ erhält. Kehren wir nun zu der in Nr. 5 genannten allgemeinen Voraussetzung zurück, daſs eine Funktion $f(z)$ im Intervalle von $-l$ bis $+l$ gegeben ist, so erhalten wir für diese Funktion unter denselben Bedingungen eine trigonometrische Darstellung, indem wir

$$z = \frac{xl}{\pi}, \qquad f(z) = f\left(\frac{xl}{\pi}\right) = \varphi(x)$$

substituieren. Alsdann wird

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

und

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(z)\,dz,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\cos kx\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\sin kx\,dx = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

folglich:

$$(1)\quad \begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\,d\alpha \\ +\dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos\frac{k\pi z}{l}\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\cos\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha + \sin\frac{k\pi z}{l}\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\sin\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha\right]. \end{cases}$$

Ist die Funktion $f(z)$ so beschaffen, dafs sie im Intervalle von $-l$ bis 0 dieselben Werte wie im Intervalle von $+l$ bis 0 hat, so werden die Integrale $B_k = 0$, und die Gleichung reduziert sich auf die Form:

$$(2)\qquad f(z) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos\frac{k\pi z}{l}\int_0^l f(\alpha)\cos\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Ist aber $f(-z) = -f(z)$, so werden die Integrale $A_k = 0$, und man erhält:

$$(3)\qquad f(z) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\frac{k\pi z}{l}\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Diese Darstellungen einer sogenannten willkürlichen Funktion beziehen sich immer auf ein *endliches,* wenn auch beliebig grofses Intervall. Es entsteht daher schliefslich noch die Frage, ob man auch für eine Funktion, die für das ganze Intervall von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ irgendwie definiert ist, eine einheitliche analytische Darstellung dieser Art gewinnen kann. In der That läfst sich dieselbe zunächst durch eine naheliegende Schlufsfolgerung vermuten und sodann streng beweisen.*) Man setze:

$$\int_{-l}^{+l} f(\alpha)\cos q\alpha\,d\alpha = \varphi(q), \qquad \int_{-l}^{+l} f(\alpha)\sin q\alpha\,d\alpha = \psi(q),$$

ferner:

$$\frac{\pi}{l} = \delta, \quad \text{also} \quad \frac{1}{l} = \frac{\delta}{\pi},$$

so erhält die Reihe (1), in welcher x statt z geschrieben wird, die Form:

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi}\varphi(0) + \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\delta}{\pi}\left[\cos(kx\delta)\,\varphi(k\delta) + \sin(kx\delta)\,\psi(k\delta)\right].$$

---

*) Ich befolge dabei im wesentlichen die Methode, welche Herr C. Neumann in seiner Schrift: Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen (Leipzig 1881) pag. 54—70, ausgebildet hat.

Läfst man nun l unbegrenzt wachsen, wobei δ nach null konvergiert, so steht zu erwarten, dafs die Summe rechts übergeht in das bestimmte Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\cos(qx)\,\varphi(q) + \sin(qx)\,\psi(q)]\,dq,$$

oder weil für $l = \infty$:

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha, \qquad \psi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\sin(q\alpha)\,d\alpha$$

wird, dafs die Gleichung besteht:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \left(\cos(qx)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha + \sin qx \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\sin(q\alpha)(d\alpha)\right),$$

das heifst:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos q(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Diese Gleichung, die *Fouriersche Integralformel*, ist zu beweisen.

18. Weitere Verallgemeinerung des Satzes der Nr. 6. Der in Nr. 6 bewiesene Satz, welcher das Fundament für alle diese Untersuchungen bildet, läfst sich in allgemeinster Weise so aussprechen:

Ist $f(x)$ eine in einem beliebigen aber endlichen Intervalle von a bis b überall endliche und integrierbare Funktion, so wird:

$$\lim \int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad \textit{und} \quad \lim \int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

für $n = \infty$ gleich null, wenn die Zahl n in beliebiger Weise über jeden Betrag hinaus wächst.

Denn da früher dieser Satz bewiesen wurde, falls n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so erkennt man leicht, wenn n von der Form $m + \beta$ ist, wobei m eine ganze Zahl, β eine Zahl kleiner als 1 bedeutet, so wird:

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \int_a^b f(x)\sin mx\cos\beta x\,dx + \int_a^b f(x)\cos mx\sin\beta x\,dx$$

und

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = \int_a^b f(x)\cos mx\cos\beta x\,dx - \int_a^b f(x)\sin mx\sin\beta x\,dx$$

und die rechten Seiten konvergieren mit wachsenden Werten von m nach null.

Daraus folgt nun wie früher: *Der Grenzwert des Integrales*

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

für $q=\infty$ *hängt nur ab von dem Verhalten der Funktion* $f(x)$ *in unmittelbarer Umgebung der Stelle* x_1.

Liegt x_1 außerhalb des Intervalles von a bis b, so wird dieser Grenzwert gleich null; liegt dagegen x_1 innerhalb des Intervalles, so wird der Grenzwert gleich:

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

vorausgesetzt, daß eine der im § 6 als hinreichend erkannten Bedingungen erfüllt ist. Fällt endlich x_1 mit einer der Grenzen a oder b des Integrationsintervalles zusammen, so ist unter denselben Bedingungen der Grenzwert des Integrales gleich $\frac{1}{2}f(a+0)$ oder $\frac{1}{2}f(b-0)$.

19. Unendliche Grenzen. Der vorstehende Satz besteht aber auch unter gewissen Bedingungen, wenn die Grenzen des Integrales unendlich werden. Läßt man zuerst b unendlich werden, betrachtet also das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_a^w f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

so muß, damit der obige Satz seine Geltung behält, erstlich dieses Integral bei jedem endlichen Werte von q einen bestimmten Wert haben, zweitens muß, nachdem $u>x_1$ angenommen ist,

$$\frac{1}{\pi}\int_u^w f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

entweder bei festem Werte von u durch Wahl von q, oder durch Wahl von u unabhängig von q kleiner als eine beliebig kleine Größe δ gemacht werden können, wie groß auch $w>u$ gewählt werden mag.

Für diese Forderungen lassen sich hinreichende Bedingungen angeben, die in einfacheren Aussagen über die Funktion $f(x)$ bestehen.

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schliefslich keine Oscillationen mehr macht, sondern von einem bestimmten Werte für x an entweder beständig wachsend, oder beständig abnehmend einer bestimmten endlichen Grenze für $x = \infty$ zustrebt, so ist nach dem zweiten Mittelwertsatze (Nr. 4):

$$\int_u^w f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} = f(u) \int_u^{u+\Theta(w-u)} \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx,$$

falls die Beträge der Funktion $f(x)$ im Intervalle von u bis ∞ nicht zunehmen, und

$$\int_u^w f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = f(w) \int_{u+\Theta(w-u)}^w \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx,$$

falls die Beträge der Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von u bis ∞ nicht abnehmen. Die beiden Integrale rechts aber werden, wenn u fixiert ist, durch Wahl von q beliebig klein, wie grofs auch w gewählt ist.

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, aber $\frac{f(x)}{x - x_1}$ absolut integrierbar ist. Denn es ist alsdann:

$$\int_u^\infty f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx < \int_u^\infty |f(x)| \frac{dx}{x - x_1},$$

und dieser Ausdruck wird durch Wahl von u bei jedem Werte von q beliebig klein.

Drittens: Wenn $f(x)$ für $x = \infty$ endlich bleibt und eine Ableitung besitzt, die im Intervalle bis $x = \infty$ absolut integrierbar ist. Denn es ist:

$$\int_u^w f(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1} dx = \left[f(x) \int_u^x \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1} dx \right]_u^w - \int_u^w f'(x) dx \int_u^x \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1} dx,$$

also:

$$\int_u^\infty f(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1} dx = f(\infty) \int_u^\infty \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1} dx - \int_u^\infty f'(x) dx \int_u^x \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1} dx,$$

oder gleich:

$$f(\infty)\int\limits_{u}^{\infty}\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}dx-\int\limits_{u}^{\infty}f'(x)\,dx\int\limits_{q(u-x_1)}^{q(x-x_1)}\frac{\sin z}{z}dz.$$

Das Integral $\int\limits_{q(u-x_1)}^{q(x-x_1)}\frac{\sin z}{z}\,dz$ ist jedenfalls nicht gröſser als der Wert $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin z}{z}\,dz$ (Nr. 471). Bezeichnet man diesen Wert mit a, so ist der Betrag des zweiten Integrales kleiner als

$$a\int\limits_{u}^{\infty}|f'(x)|\,dx,$$

es wird also ebenso wie das erste Integral der rechten Seite durch Wahl von u beliebig klein, wie groſs auch q werden mag.

Unter gleichartigen Bedingungen für die untere Grenze $-\infty$ besteht dann der Satz:

$$\lim\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx=\frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$$

für jeden endlichen Wert von x_1.

20. Übergang zum Doppelintegral. Von dem behandelten einfachen Integrale kann man nun leicht zu einem zweifachen Integrale übergehen. Es ist:

$$\int\limits_{0}^{q}\cos q\,(x-x_1)\,dq=\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1},$$

also ist:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx\int\limits_{0}^{q}\cos q\,(x-x_1)\,dq=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\,dx.$$

Auf der linken Seite kann man, da $f(x)$ integrierbar ist, die Folge der Integrationen vertauschen, und demnach wird:

$$\int\limits_{0}^{q}dq\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos q\,(x-x_1)\,dx=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

und folglich besteht der Satz:

$$\lim_{q=\infty}\int\limits_{0}^{q}dq\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos q\,(x-x_1)\,dx$$

ist gleich null, wenn x_1 aufserhalb des Intervalles von a bis b liegt, dagegen gleich $\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$, wenn x_1 innerhalb dieses Intervalles liegt. Ist $x_1 = a$ oder b, so ist der Grenzwert bezüglich gleich $\frac{1}{2}f(a+0)$ oder $\frac{1}{2}f(b-0)$.

Diese Formel gilt auch, wenn a und b unendlich werden, vorausgesetzt, dafs die Funktion $f(x)$ im unendlichen die in Nr. 19 als hinreichend erkannten Eigenschaften besitzt; es ist alsdann:

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f_1(x_1-0)] = \lim_{q=\infty} \lim_{\substack{b=+\infty \\ a=-\infty}} \frac{1}{\pi}\int_0^q dq \int_a^b f(x)\cos q(x-x_1)\,dx.$$

Hierbei ist die Reihenfolge der Grenzprozesse zu beachten. Es ist zuerst das zweifache Integral zwischen endlichen Grenzen zu bilden, sodann sind a und b unendlich, und schliefslich q unendlich zu setzen. Man kann auch zuerst q unendlich werden lassen, wenn man a und b so bestimmt hat, dafs der Punkt x_1 eingeschlossen wird; wesentlich nach dem bisherigen Beweisgang aber ist, dafs zuerst das Doppelintegral mit endlichen Grenzen gebildet wird.

21. Gültigkeitsbedingungen für die Fouriersche Integralformel. Schliefslich bleibt nur noch die Frage: Unter welchen Bedingungen gilt nun auch die Gleichung:

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos q(x-x_1)\,dx,$$

welche wir oben als die Fouriersche Integralformel bezeichnet haben? Setzt man:

$$\int_0^q dq \int_a^b f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = U, \qquad \int_a^b f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = V,$$

so ist bei jedem endlichen Werte von b:

$$U = V.$$

Setzt man ferner:

$$\int_0^q dq \int_a^\infty f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = U', \qquad \int_a^\infty f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = V'$$

so ist $\qquad V' = \lim V \quad$ für $\quad b = \infty$.

Damit nun auch die Gleichung $U' = V'$ bestehen bleibe, mufs

$$U' = \lim U \quad \text{für} \quad b = \infty$$

sein, d. h. es mufs

$$\int_0^q dq \int_a^\infty f(x) \cos q(x - x_1)\, dx = \lim_{b=\infty} \int_0^q dq \int_a^b f(x) \cos q(x - x_1)\, dx.$$

Diese Gleichung erfordert einerseits, dafs die rechte Seite überhaupt eine bestimmte Grenze hat, was der Fall ist, sobald sich eine untere Grenze u ausfindig machen läfst, so dafs für jeden Wert $w > u$:

$$\int_0^q dq \int_u^w f(x) \cos q(x - x_1)\, dx$$

kleiner wird als eine beliebig vorgegebene Gröfse δ; andererseits dafs

$$\int_u^\infty f(x) \cos q(x - x_1)\, dx$$

ein bestimmter Wert ist, dessen Integral nach q beliebig klein ist, wenn u hinreichend grofs gewählt wird. Unter q ist dabei eine endliche bestimmte Gröfse zu verstehen.

Auch hierfür lassen sich wiederum hinreichende Bedingungen angeben, durch welche die zuletzt gefundenen drei eingeschränkt werden.

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schliefslich keine Oscillationen mehr macht, sondern von einem bestimmten Werte für x an entweder beständig wachsend oder beständig abnehmend für $x = \infty$ *nach null* konvergiert und dabei integrierbar ist. Denn alsdann ist

$$\int_u^w f(x) \cos q(x - x_1)\, dx = f(u) \int_u^{u+\theta(w-u)} \cos q(x - x_1)\, dx$$

$$= f(u) \left[\frac{\sin q(x - x_1)}{q}\right]_u^{u+\theta(w-u)},$$

also

$$\int_0^q dq \int_u^w f(x) \cos q(x - x_1)\, dx = f(u) \int_0^q \left[\frac{\sin q[u + \theta(w-u) - x_1]}{q} - \frac{\sin q(u - x_1)}{q}\right] dq$$

$$= f(u) \int_{q(u-x_1)}^{q[u+\theta(w-u)-x_1]} \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Dieser Wert ist, wie grofs auch w werden mag, jedenfalls kleiner als

$$f(u)\int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz$$

und wird also mit $f(u)$ kleiner als jede vorgegebene Gröfse. Desgleichen ist auch nach dem ersten Mittelwertsatze:

$$\int_u^\infty f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = M[\cos q(x-x_1)]\int_u^\infty f(x)\,dx,$$

also dem Betrage nach nicht gröfser als

$$\left|\int_u^\infty f(x)\,dx\right|.$$

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x=\infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, aber dabei absolut integrierbar ist. Denn alsdann ist:

$$\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx < \int_u^\infty f(x)\,dx.$$

Drittens: Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, die für $x=\infty$ nach null konvergiert und deren Ableitung $f'(x)$ absolut integrierbar ist. Denn es ist:

$$\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \left[f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{q}\right]_u^w - \frac{1}{q}\int_u^w f'(x)\sin q(x-x_1)\,dx,$$

also:

$$\int_0^q dq\int_u^w f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = f(w)\int_0^q \frac{\sin q(w-x_1)}{q}\,dq - f(u)\int_0^q \frac{\sin q(u-x_1)}{q}\,dq$$

$$-\int_0^q \frac{dq}{q}\int_u^w f'(x)\sin q(x-x_1)\,dx.$$

Die beiden ersten Terme rechts werden mit $f(u)$ und $f(w)$ beliebig klein, der dritte ist gleich:

$$\int_u^w f'(x)\,dx\int_0^q \frac{\sin q(x-x_1)}{q}\,dq,$$

also kleiner als das Produkt von

$$\int_u^w |f'(x)|\,dx \quad \text{mit} \quad \int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

welches durch Wahl von u beliebig klein wird.

Desgleichen ist:

$$\int_u^\infty f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \left[f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{q}\right]_u^\infty - \frac{1}{q}\int_u^\infty f'(x)\sin q(x-x_1)\,dx.$$

Der absolute Wert von $\frac{\sin q(x-x_1)}{q}$ ist bei allen Werten von q nicht größer als eins, also wird die rechte Seite dem Betrage nach nicht größer als

$$f(u) + \int^w |f'(x)|\,dx.$$

Ist solch eine Bedingung auch für $x = -\infty$ erfüllt, so besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^q dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx.$$

Konvergiert nun q nach unendlich, so geht die rechte Seite in den Wert $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ über, weil mit den Bedingungen dieses Paragraphen zugleich die Bedingungen im § 17 erfüllt sind. Sonach wird auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)].$$

Unter den als ausreichend erkannten Bedingungen für die Giltigkeit dieser Gleichung wollen wir die beiden nochmals hervorheben, die für die Anwendung am wichtigsten sind. Die Fouriersche Integralformel gilt bei jedem Werte von x:

1. für jede stetige Funktion, die im Intervalle von $-\infty$ bis $+\infty$ an keiner Stelle, auch nicht im Unendlichen, unendlich viele Maxima und Minima hat und im ganzen unendlichen Intervalle integrierbar ist (solch eine Funktion verschwindet für $x = \pm\infty$);
2. für jede stetige Funktion, die für $x = \pm\infty$ den Wert null hat und deren Ableitung absolut integrierbar ist.

22. Spezialisierung der Formel. Die allgemeine Formel erhält eine speziellere Form, sobald $f(x)$ entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion ist; denn schreibt man dieselbe in der Form:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\cos qx \cos qx_1 + \sin qx \sin qx_1)\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

so folgt: Ist $f(x) = f(-x)$, so wird für $x_1 > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq \cos qx_1 \int_0^\infty f(x) \cos qx\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

und ist $f(x) = -f(-x)$, so wird für $x_1 > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq \sin qx_1 \int_0^\infty f(x) \sin qx\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)].$$

Bemerkungen.

Erstes Kapitel.

405. Seite 8, Zeile 4 v. u. Hier ist von dem Satze der gleichmäfsigen Stetigkeit Gebrauch gemacht. Siehe z. B.

Genocchi-Peano, Nr. 21, Satz VII.

Vergl. auch die Bemerkungen zu Nr. 547. 549. 576.

406. Seite 10, Zeile 1 ff. v. o. Der Beweis des hier benutzten Satzes findet sich z. B. bei

Genocchi-Peano, Nr. 14, Theorem VI.

406. Seite 10, Zeile 16 v. u. Dafs der Grenzwert in der That von der Einteilung unabhängig ist, wird bei der analogen Betrachtung für das Doppelintegral noch genauer ausgeführt, vergl. Nr. 576.

411. Seite 17, Zeile 12. Die hier benutzte Summenformel findet man z. B. bewiesen bei

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik, Erster Band, § 28.

417. Interessante Relationen für Integrale der Form $\int e^x g(x)\,dx$, wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet, findet man bei

C. Hermite, Cours d'analyse I. Paris 1873.

428. Vereinfachte Beweise für die Transcendenz von e und π wurden gegeben (Math. Ann. 43):

K. Hurwitz, Beweis der Transcendenz der Zahl e.

D. Hilbert, Über die Transcendenz der Zahlen e und π.

P. Gordan, Transcendenz von e und π.

Zweites Kapitel.

433—440. Die Frage, unter welchen Umständen das Integral einer algebraischen Funktion sich auf bekannte Transcendenten zurückführen läfst, ist seit Euler vielfach behandelt worden. Man vergleiche das Referat von

C. Brill und M. Noether, Jahresberichte der deutschen Math.-Ver., Bd. 3,

welches eine Übersicht über die einschlägigen Arbeiten und zugleich eine allgemeine geometrische Auffassung dieser Frage giebt.

441—452. Von Lehrbüchern über die elliptischen Funktionen sind u. a. zu empfehlen:

a) für numerische Rechnung:

K. Schellbach, Die Lehre von den elliptischen Integralen, Berlin, 1864.

M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques II, Paris 1826.

b) Theoretische Behandlung nach Abel und Jacobi:

H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1861.

Ch. Hermite, Note sur la théorie des Fonctions elliptiques, Paris 1894.

c) Behandlung nach Cauchy:

M. Briot et M. Bouquet, Théorie des fonctions doublement périodiques. Paris 1859.

d) Behandlung hauptsächlich nach Riemann.

K. Bobek, Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1884.

H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, Leipzig 1899.

e) Nach Weierstrafs:

Die Formelsammlung:

H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, Göttingen 1885,

und als Kommentare dazu:

J. Tannery-Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, bis jetzt 3 Bände, Paris 1893—98,

P. Appell-E. Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris 1897.

für die Anwendungen:

G. H. Halphen, traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris 1886—93.

f) für die Beziehungen zur Zahlentheorie (nach Kronecker):

H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891.

457. Der Integrallogarithmus spielt gleichzeitig in der modernen Zahlentheorie und der modernen Funktionentheorie eine wichtige Rolle. Vgl. z. B.

J. Petersen, Vorlesungen über Funktionstheorie, Kopenhagen 1898.

464 ff. Von Lehrbüchern über Abelsche Integrale und Abelsche Funktionen nennen wir:

a) Behandlung funktionentheoretisch nach Riemann:

C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, Leipzig 1886.

b) Behandlung algebraisch geometrisch nach Clebsch:

A. Clebsch-P. Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866.

c) Beide Standpunkte vereinend:

Appell-E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris 1895.

H. Stahl, Abelsche Funktionen, Leipzig 1896.

H. F. Baker, Abel's Theorem, Cambridge 1897.

d) Unter gleichzeitiger Hinzuziehung physikalischer Vorstellungen:

F. Klein, Riemannsche Flächen, Vorlesungen von Winter 91/92 und Sommer 92 (autographiertes Vorlesungsheft),

F. Klein, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882.

Sehr zu empfehlen ist auch die Übersicht über die Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen bei:

C. Jordan, Cours d'analyse II. Paris 1896.

465. Wegen der binomischen Integrale verweisen wir auf:

L. Euler, Institutiones calculi integralis.

Drittes Kapitel.

467. Zum Nachschlagen von Integralwerten, die man braucht, sind besondere Tafeln erschienen. Sehr brauchbar ist das Werkchen von:

F. Minding, Sammlung von Integraltafeln, Berlin 1849.

und sehr umfangreich:

D. Bierens de Haan, Nouvelles tables d'intégrales définies, Leiden 1867.

481. Wallis, Arithmetica infinitorum.

483. Hier ist wieder die gleichmäfsige Stetigkeit benutzt (Seite 108, Zeile 6 v. o.).

485. Seite 110, Zeile 11 v. u. streiche man „oder beide“ und lese „wird“ für „werden“.

490. Das Integral $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine grofse Rolle. Man findet seine Werte berechnet bei:

A. Markoff, Table des valeurs de l'intégrale $\int\limits_x^\infty e^{-t^2}dt$, Petersburg 1888.

494. Zur Einführung in die Fourierschen Reihen ist zu empfehlen:

B. Riemann-K. Hattendorf, Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1869.

Für weitergehende Studien:

U. Dini, Serie du Fourier, Pisa 1884.

Viertes Kapitel.

509. Die Funktion $\Gamma(z)$ ist neuerdings auch funktionentheoretisch behandelt und mit der Riemannschen Funktion $\zeta(z)$ in Verbindung gesetzt worden. Vergl.:

J. Petersen, Funktionstheorie, Zweiter Abschnitt, Kapitel I.

Hölder hat bewiesen, daſs $\Gamma(z)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann (Mathematische Annalen Band 28).

533. Bei:

C. F. Gauſs, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, Werke III.

findet man für $1 \leqq x \leqq 2$ die Werte von $\log \Gamma(x)$ auf 20, $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ auf 18 Dezimalen berechnet.

Fünftes Kapitel.

539. Auſser dem im Texte bereits genannten Handbuch von Heine verweisen wir wegen mechanischer Quadratur auf die bereits öfter erwähnte Differenzenrechnung von Markoff.

547. Seite 202, Zeile 7. Hier wird wieder der Satz von der gleichmäſsigen Stetigkeit benutzt.

549. Seite 205, Zeile 8. Hier gilt die gleiche Bemerkung. Man lese σ statt 0.

553 ff. Eng verwandt mit der Landenschen Transformation ist Gauſs' Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Vergl. in Gauſs' Werke III die Arbeiten:

Determinatio Attractionis,

Nachlaſs [Arithmetisch Geometrisches Mittel] Pars I, II.

556. Eine ganze Reihe ähnlicher Relationen findet man bei:

J. Bertrand, Calcul intégral, Paris 1870.

557. Die algebraisch rektifizierbaren Raumkurven sind auch untersucht von:

P. Stäckel, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven, Mathematische Annalen Bd. 43 und 45.

560—565. Auch hierzu vergleiche man:

J. Bertrand, Calcul intégral, Paris 1870.

Sechstes Kapitel.

567. Streng genommen ist in der Schluſsfolgerung (Seite 235, Zeile 12 v. u. ff.) eine Lücke. l ist abhängig von x und ω, l_1 ist der kleinste, l_2 der gröſste Wert, den l annimmt, wenn x bei festem ω zwischen den angegebenen Grenzen variiert, sodaſs l_1 und l_2 Funktionen von ω sind. Es wird nun der Satz benutzt, daſs

l_1 und l_2 stetige Funktionen von ω sind, wenn l eine stetige Funktion von x und ω ist.

576. Seite 245, Zeile 17 v. u. Hier wird der Satz von der gleichmäfsigen Stetigkeit einer Funktion von 2 Veränderlichen benutzt. Vergl. Genocchi-Peano Nr. 100, Satz VII.

577. Seite 251, Zeile 10 v. o. lies „bereits" statt „unter einer engeren Bedingung".

584. Strenge und einfache Definitionen geometrischer Gröfsen findet man in dem ausgezeichneten Buche:

G. Peano, Applicazioni geometriche, Torino 1887.

585. Seite 263, Zeile 1 lies „F" statt „F_1".

592. Die Betrachtung dieser und der folgenden Nummer setzt voraus, dafs f und g nebst ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von u und v sind.

594. Hier mufs man natürlich das F, welches den Wert des Doppelintegrales angiebt, von dem Gaufsschen F unterscheiden.

598—604. Weitergehende Untersuchungen findet man bei:

L. Kronecker, Vorlesungen über einfache und mehrfache Integrale, Leipzig 1894.

Siebentes Kapitel.

615. Die Kurvenintegrale spielen eine grofse Rolle in der theoretischen Physik, besonders in der Potentialtheorie. Vergl.:

Picards Traité d'analyse I, Kapitel III ff.

Seite 310, Zeile 5 v. u. lies „*seien eindeutige Funktionen, welche*" statt „*sollen*".

617. Eine Probe auf den Satz dieser Nummer bildet das über einen Kreis um den Nullpunkt erstreckte Integral:

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \int d \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

bei diesem sind die Stetigkeitsbedingungen nicht erfüllt und es hat auch thatsächlich nicht den Wert 0, sondern (610.4) den Wert 2π.

618. Aufser dem Polarplanimeter giebt es noch eine grofse Anzahl anderer Integrationsapparate, vergl.:

W. Dyck, Katalog, München 1892.

Achtes Kapitel.

621. Die Betrachtungen dieses Kapitels sind um so notwendiger, als wir ja im elften Kapitel uns meist auf solche analytische Funktionen beschränkt haben, bei denen (vergl. Nr. 362) $\lim\limits_{n=\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ einen bestimmten endlichen Wert hat. Wir konnten

dies um so eher thun, als die Funktionen, auf welche wir unsere Betrachtungen anwandten — wie e^z, $\sin z$, $\cos z$, lz — dieser Bedingung genügen. Unsere jetzigen Betrachtungen befreien uns nun von dieser Beschränkung.

624. Seite 325, Zeile 2 lies: „wenn z auf einer bestimmten Kurve in den gerade fixierten Punkt (x, y) hineinrückt, so daſs" statt „wenn".

643. Seite 352, Zeile 4 v. u. lies: „für $w = w_0$ den Wert z_0" statt „für $w = w_1$ den Wert w_0".

647. Eine notwendige Ergänzung der hier gemachten Ausführungen bildet der Satz, daſs $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ eindeutige Funktionen von w sind, was in der Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen wird. Die Funktionen sn, cn, dn wurden in Nr. 452 mit sin am, cos am, Δ am bezeichnet.

Sachregister.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern der einzelnen Artikel.)

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Z.

